



# WYGRAJ INDEKS

## Ogólnopolski Konkurs Matematyczno–Fizyczny Zestaw z matematyki

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

### Zasady

- Rozwiązanie każdego zadania należy zapisać na oddzielnej kartce.
- Każda kartka musi zawierać wydrukowaną etykietę z imieniem i nazwiskiem ucznia, adresem szkoły, e-mailem i nr telefonu.
- Do zadań prosimy dołączyć własnoręcznie podpisane oświadczenie o samodzielności w rozwiązaniu zadań.

### Adres

Rozwiązania należy nadesłać na adres:  
Dziekanat Wydziału FTiMS  
Politechnika Gdańska  
ul. Narutowicza 11/12  
80-233 Gdańsk  
z dopiskiem **Wygraj indeks.**

Termin nadsyłania prac to **14 marca 2016!**

### Zadania

1. Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$  pierwiastki równania

$$x^2 + ax + \frac{1}{a^2} = 0$$

są sinusem i cosinusem tego samego kąta ostrego?

2. Wykaż, że liczba  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$  jest wymierna.
3. Udowodnij, że suma dwóch kolejnych liczb naturalnych i suma ich kwadratów są względnie pierwsze.
4. Rozwiąż równanie

$$\frac{\frac{1}{(1-\sin x)^2} - \frac{1}{(1+\sin x)^2}}{\frac{1}{(1-\cos x)^2} - \frac{1}{(1+\cos x)^2}} = \operatorname{tg} x.$$

5. W kuli o promieniu 10 cm znajduje się 8 jednakowych kul o promieniach długości  $r$ , z których każda jest styczna do dwóch sąsiednich, a wszystkie są styczne do danej kuli w punktach jej pewnego koła wielkiego (równika). Oblicz promień kuli stycznej zewnętrznie do tych ośmiu kul i wewnętrznie do danej kuli.