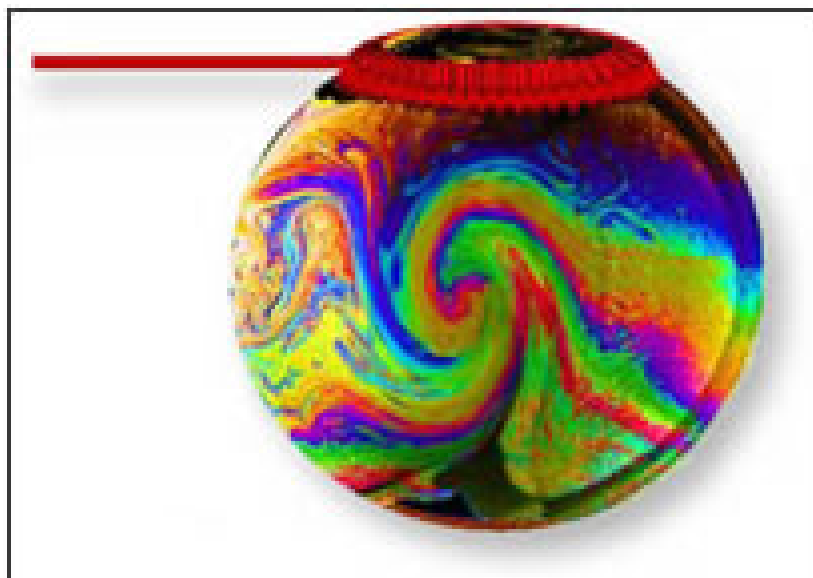


Piotr Grygiel i Ryszard Włodarski

Laboratorium drgań i zjawisk falowych

(na prawach rękopisu)



Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska

2014

Spis treści

Ćwiczenie 1. Badanie drgań struny (P. Grygiel)	5
1.1. Zasada ćwiczenia	5
1.2. Wiadomości teoretyczne	5
1.3. Aparatura pomiarowa	7
1.4. Zadania	7
1.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	7
1.6. Wymagane wiadomości	10
1.7. Literatura	10
Ćwiczenie 2. Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu za pomocą interferometru Quinckego (P. Grygiel)	11
2.1. Zasada ćwiczenia	11
2.2. Wiadomości teoretyczne	11
2.3. Aparatura pomiarowa	13
2.4. Zadania	13
2.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	13
2.6. Wymagane wiadomości	15
2.7. Literatura	15
Ćwiczenie 3. Wyznaczanie długości fali światła przy użyciu interferometru Michelsona (P.Grygiel)	17
3.1. Zasada ćwiczenia	17
3.2. Wiadomości teoretyczne	17
3.3. Aparatura pomiarowa	20
3.4. Zadania	22
3.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	22
3.6. Wymagane wiadomości	23
3.7. Literatura	24
Ćwiczenie 4. Badanie polaryzacji światła przez płytkę ćwierćfalową (P. Grygiel)	25
4.1. Zasada ćwiczenia	25
4.2. Wiadomości teoretyczne	25
4.2.1. Polaryzacja światła	25
4.2.2. Polaryzator i płytka ćwierćfalowa	30
4.3. Aparatura pomiarowa	31
4.4. Zadania	32
4.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	32
4.6. Wymagane wiadomości	36
4.7. Literatura	36

Ćwiczenie 5. Badanie szeregowego i równoległego obwodu RLC (P. Grygiel)	37
5.1. Zasada ćwiczenia	37
5.2. Wiadomości teoretyczne	37
5.2.1. Szeregowy obwód RLC	37
5.2.2. Równoległy obwód RLC	40
5.3. Aparatura pomiarowa	44
5.4. Zadania	44
5.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	45
5.6. Wymagane wiadomości	48
5.7. Literatura	48
Ćwiczenie 6. Badanie stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym linii transmisyjnej (P. Grygiel i R. Włodarski)	49
6.1. Zasada ćwiczenia	49
6.2. Wiadomości teoretyczne	49
6.3. Aparatura pomiarowa	57
6.4. Zadania	57
6.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	58
6.6. Wymagane wiadomości	60
6.7. Literatura	61
Ćwiczenie 7. Badanie propagacji impulsów w linii transmisyjnej (P. Grygiel i R. Włodarski)	63
7.1. Zasada ćwiczenia	63
7.2. Wiadomości teoretyczne	63
7.3. Aparatura pomiarowa	68
7.4. Zadania	69
7.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	69
7.6. Wymagane wiadomości	72
7.7. Literatura	72
Ćwiczenie 8. Badanie pojedynczych i sprzężonych obwodów rezonansowych (P. Grygiel)	73
8.1. Zasada ćwiczenia	73
8.2. Wiadomości teoretyczne	73
8.3. Aparatura pomiarowa	79
8.4. Zadania	80
8.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	80
8.6. Wymagane wiadomości	83
8.7. Literatura	84
Ćwiczenie 9. Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki za pomocą pierścieni Newtona (P. Grygiel)	85
9.1. Zasada ćwiczenia	85
9.2. Wiadomości teoretyczne	85
9.3. Aparatura pomiarowa	87
9.4. Zadania	88
9.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	89
9.6. Wymagane wiadomości	90
9.7. Literatura	90

Ćwiczenie 10. Badanie dyfrakcji fal de Broglie'a elektronów (M. Radzicki i W. Tomaszewicz)	91
10.1. Zasada ćwiczenia	91
10.2. Wiadomości teoretyczne	91
10.2.1. Hipoteza de Broglie'a fal materii	91
10.2.2. Dyfrakcja fal na kryształach. Wzór Bragga	93
10.2.3. Struktura grafitu	94
10.3. Aparatura pomiarowa	95
10.4. Zadania	96
10.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników	96
10.6. Wymagane wiadomości	98
10.7. Literatura	98

Ćwiczenie 1

Badanie drgań struny

1.1. Zasada ćwiczenia

Jednorodna struna pobudzana jest do drgań uderzeniem gumowego młoteczka. Drgania struny obserwowane są na ekranie oscyloskopu. Mierzy się podstawową częstotliwość drgań w funkcji siły napinającej strunę oraz jej długości czynnej.

1.2. Wiadomości teoretyczne

Założmy na wstępie, że struna ma postać doskonale giętkiego, jednorodnego drutu o przekroju jednakowym na całej długości, napiętego siłą F i sztywno zamocowanego na obu końcach. Założmy również, że struna została odkształcona przez niewielkie, chwilowe odchylenie jej w bok. Zakłócenie to, dzięki sprężystości struny, będzie propagować w czasie w całej jej długości, tworząc falę przemieszczającą się z pewną prędkością.

Wyodrębnijmy w strunie nieskończenie mały element o długości dx (rys. 1.1). Jak wynika z rysunku, na element ten działają siły generowane przez naciąg struny. Ich składowe pionowe tworzą wypadkową siłę $F_{w\xi}(x)$, starającą się przywrócić strunę do położenia równowagi:

$$F_{w\xi} = F_\xi(x) + F_\xi(x + dx), \quad (1.1)$$

gdzie

$$F_\xi(x) = -F \sin \varphi_1, \quad F_\xi(x + dx) = F \sin \varphi_2, \quad (1.2)$$

skąd

$$F_{w\xi}(x) = F(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (1.3)$$

Ponieważ odkształcenie struny jest niewielkie, możemy zapisać, że

$$\sin \varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x, \quad \sin \varphi_2 \approx \operatorname{tg} \varphi_2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+dx}, \quad (1.4)$$

przy czym

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x dx = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x dx. \quad (1.5)$$

Zgodnie z drugą zasadą dynamiki, siła $F_{w\xi}$ dana wzorem (1.3) równa jest także iloczynowi masy elementu dl i jego przyspieszenia:

$$F_{w\xi} = \rho_l dl \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

gdzie ρ_l jest gęstością przypadającą na jednostkę długości struny, t — czasem. Wobec małych odkształceń struny można przyjąć, że

$$dl \approx dx. \quad (1.7)$$

Na podstawie równań (1.3) - (1.6) możemy więc zapisać, że

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho_l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.8)$$

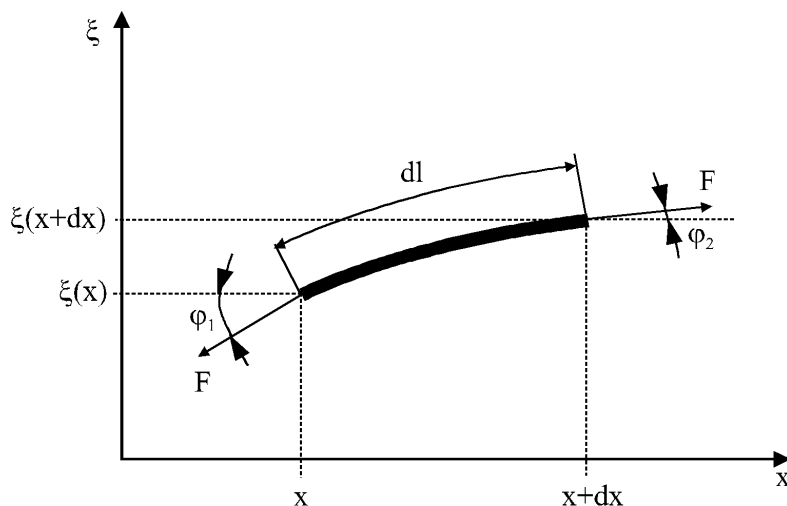
Wzór (1.8) jest równaniem fali poprzecznej, rozchodzącej się z prędkością fazową

$$v_f = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}, \quad (1.9)$$

zależną od napięcia struny F .

W wyniku pobudzenia w strunie powstanie fala stojąca. Ponieważ struna jest obustronnie zamocowana, na jej końcach będą znajdowały się węzły fali. W przypadku podstawowego drgania struny, w jej środku powstanie strzałka fali stojącej. Wobec tego długość struny l równa jest połowie długości fali podstawowej:

$$l = \frac{\lambda_1}{2}. \quad (1.10)$$



Rysunek 1.1. Wycinek struny napiętej siłą F

Ponieważ

$$\lambda_1 f_1 = v_f \quad (1.11)$$

(f_1 jest częstotliwością podstawowego drgania struny), na podstawie wyrażeń (1.9) - (1.11) otrzymamy

$$f_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}. \quad (1.12)$$

Należy zauważyć, że w strunie mogą wystąpić dalsze węzły drgań. W fali stojącej odstęp pomiędzy sąsiednimi węzłami równy jest połowie jej długości. W strunie wystąpić więc musi całkowita liczba n połówek fali. Mówimy wówczas o n - tej harmoniczej. Mamy wówczas

$$\lambda_n = \frac{\lambda_1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.13)$$

Częstotliwość n - tej harmoniczej dana jest więc wzorem

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho_l}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.14)$$

Na rys. 1.2 przedstawiono odkształcenia struny dla pięciu pierwszych harmoniczych.

1.3. Aparatura pomiarowa

Stosowana w ćwiczeniu aparatura pomiarowa przedstawiona jest na rys. 1.3. Badana struna rozpięta jest pomiędzy zaczepem umożliwiającym regulację siły naciągu a mierzącym ją dynamometrem. Struna wsparta jest na dwóch pryzmatycznych podstawkach. Odległość między nimi, mierzona linią ze skalą milimetrową, wyznacza czynną długość struny. Drgania struny za pomocą przetwornika fotoelektrycznego zamieniane są na sygnał elektryczny. Sygnał ten, po wzmacnieniu, kierowany jest do wejścia cyfrowego miernika częstotliwości i może być dodatkowo odsłuchiwany za pomocą głośnika. Struna pobudzana jest do drgań małym gumowym młoteczką.

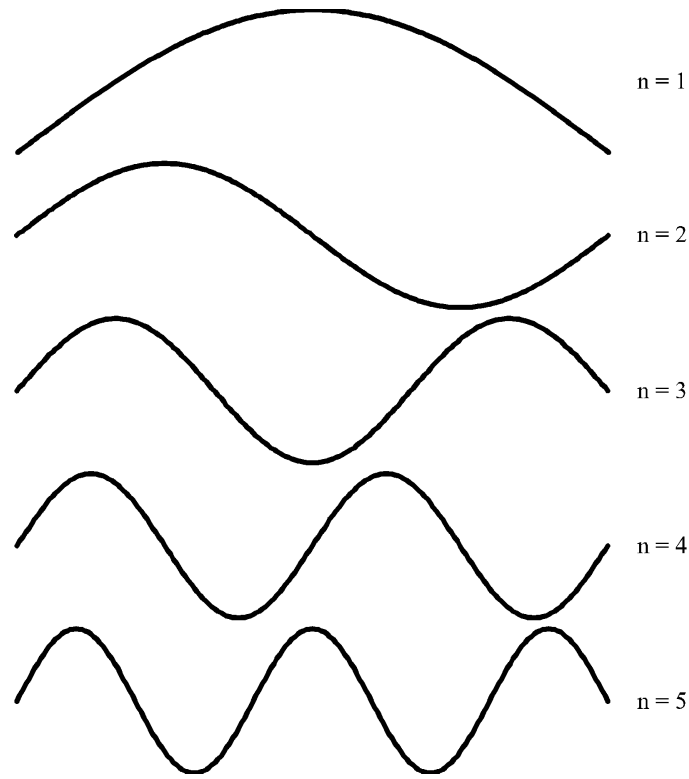
1.4. Zadania

Wyznaczyć częstotliwość pierwszej harmoniczej f_1 drgań struny w funkcji:

1. Siły jej naciągu przy stałej długości czynnej.
2. Długości czynnej przy stałej sile naciągu.

1.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Przed rozpoczęciem pomiarów należy przełączyć licznik uniwersalny na funkcję miernika częstotliwości. Następnie przełącznik wzmacnienia wzmacniacza nastawić na

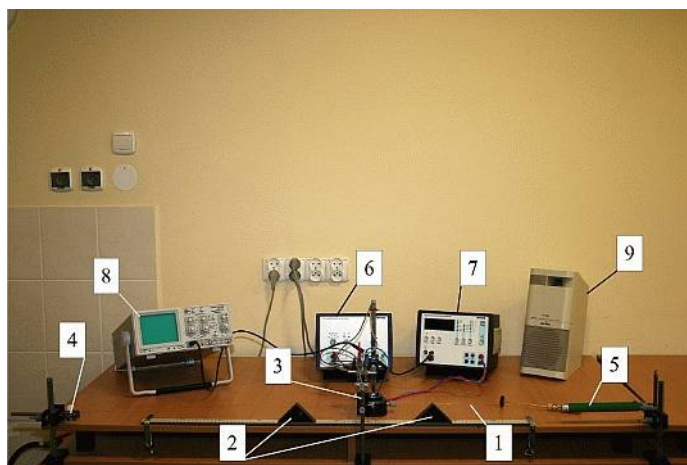


Rysunek 1.2. Pierwsze pięć harmonicznych drgań struny zamocowanej sztywno na obu końcach

wartość 10^2 , pokrętko płynnej regulacji wzmocnienia ustawić w środkowym położeniu. Należy również sprawdzić, czy pryzmatyczne wsporniki struny są umiejscowione tak, aby fotoelektryczny czujnik drgań znajdował się w środku czynnego odcinka struny. Przemieszczając czujnik w górę bądź w dół ustawić jego szczelinę tak, aby pokrywała się z cieniem struny wywołanym światłem żarówki. W wyniku takiej regulacji drgania struny powinny być widoczne na ekranie oscyloskopu, a ich częstotliwość powinna być pewnie mierzona przez częstościomierz. W przeciwnym przypadku należy zwiększyć wzmocnienie wzmacniacza.

Uwaga: Strunę należy pobudzać do drgań delikatnymi uderzeniami młotka. Odczytów częstotliwości dokonywać, gdy na ekranie oscyloskopu ukaże się możliwie niezniekształcona sinusoida, świadcząca o niskim poziomie wyższych harmonicznych.

ad.1. Przesuwając wsporniki pryzmatyczne struny po podziałce milimetrowej ustawić czynną długość struny równą 50 cm. Obracając pokrętkiem śruby lewego zacze-
pu



Rysunek 1.3. Aparatura pomiarowa do badania drgań struny. 1 — badana struna, 2 — wsporniki pryzmatyczne, 3 — fotoelektryczny przetwornik drgań struny, 4 — zaczep z regulacją siły naciągu struny, 5 — dynamometr, 6 — wzmacniacz małej częstotliwości, 7 — częstotlicznik (licznik uniwersalny), 8 — oscyloskop, 9 — głośnik kontrolny

napinającego strunę uzyskiwać siłę w zakresie 10 N - 40 N, ze skokiem 5 N. Dla każdej wartości siły napinającej mierzyć wartość częstotliwości drgań podstawowych f_1 . Wyniki pomiarów przedstawić na wykresie $f_1^2 - F$. Jak wynika ze wzoru (1.12), przekształconego do postaci

$$f_1^2 = f(F), \quad (1.15)$$

rezultaty pomiarów można przedstawić w postaci prostej o ogólnym równaniu

$$Y = AX + B, \quad (1.16)$$

gdzie $X = F$, $Y = f_1^2$, $A = 1/4l^2\rho_l$, $B = 0$. Wartości parametrów A i B prostych i ich niepewności S_A i S_B określić metodą regresji liniowej. Prostą należy narysować na wykresie. Następnie, korzystając z otrzymanych wyników, określić gęstość materiału struny przypadającą na jednostkę jej długości, $\rho_l = 1/4l^2A$. Wyniki podać wraz z niepewnością $S_{\rho_l} = S_A/4l^2A^2$.

ad.2. Przystępując do pomiarów należy ustawić wartość siły napinającej równą 30 N. Następnie przeprowadzić serię pomiarów częstotliwości f_1 dla długości struny l z zakresu 30 cm - 80 cm (skok 10 cm). Wyniki pomiarów przedstawić na wykresie $f_1 - 1/l$. Ze wzoru (1.11) przekształconego do postaci

$$f_1 = f(1/l) \quad (1.17)$$

wynika, że wyniki pomiarów można przedstawić w postaci prostej danej równaniem (1.16), w którym $X = l^{-1}$, $Y = f_1$, $A = v_f/2$, $B = 0$. Postępując w sposób opisany w poprzednim punkcie, wyznaczyć prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie, $v_f = 2A$, wraz z niepewnością $S_{v_f} = 2S_A$.

1.6. Wymagane wiadomości

1. Ruch falowy. Fala i charakteryzujące ją wielkości.
2. Pojęcie idealnej struny. Wyprowadzenie wzoru na częstotliwość drgań własnych struny.
3. Fala stojąca i jej własności.
4. Wpływ obecności wyższych harmonicznych na kształt drgającej struny.

1.7. Literatura

- [1] D. Haliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, t. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.

Ćwiczenie 2

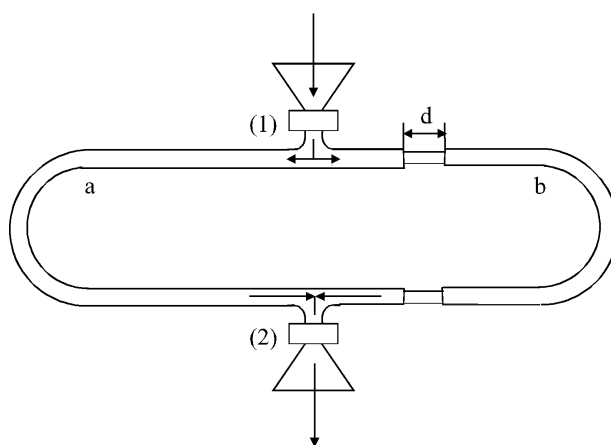
Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu za pomocą interferometru Quinckego

2.1. Zasada ćwiczenia

Fala dźwiękowa o określonej częstotliwości jest w interferometrze (rurze) Quinckego dzielona na dwie spójne (koherentne) części. W trakcie pomiarów zmienia się długość drogi przebytej przez falę w jednej z części interferometru. Wskutek interferencji z falą biegnącą w części o niezmienniej długości ulega wówczas zmianie natężenie dźwięku u wylotu interferometru. Na tej podstawie wyznacza się długość fali dźwiękowej w powietrzu, a następnie jej prędkość.

2.2. Wiadomości teoretyczne

Interferometr Quinckego składa się z dwóch metalowych rurek a i b w kształcie litery „U” (rys. 2.1). Część b można przesuwając względem części a , zmieniając jej długość. Do części a dołączone są dwie krótkie rurki 1 i 2, położone naprzeciw siebie. W rurce 1 wytwarza się falę dźwiękową o znanej częstotliwości. Dzieli się ona na dwie



Rysunek 2.1. Budowa interferometru Quinckego

fale cząstkowe, biegnące ramionami a i b interferometru i spotykające się w rurce 2. Jeśli fale pokonają w obu częściach interferometru jednakowe drogi, będą miały w rurce 2 jednakowe fazy drgań i wytworzą dźwięk o natężeniu w przybliżeniu takim samym jak w rurce 1. Wysunięcie części b interferometru o odcinek d spowoduje zwiększenie drogi przebywanej przez propagującą w tej części falę. Wywoła to różnicę faz pomiędzy cząstkowymi falami nakładającymi się w rurce 2 i na ogół zmniejszenie natężenia dźwięku.

Korzystając z równania biegnącej fali płaskiej, drgania cząsteczek powietrza u wylotu interferometru, związane z falami dźwiękowymi rozchodzącymi się w ramionach a i b interferometru, można opisać wzorami:

$$\xi_a(t) = A \exp [i(\omega t - kx_a)], \quad (2.1)$$

$$\xi_b(t) = A \exp [i(\omega t - kx_b)]. \quad (2.2)$$

Tutaj x_a i x_b są drogami przebytymi przez obie fale w częściach a i b interferometru od wlotu 1 do wylotu 2,

$$\omega = 2\pi f \quad (2.3)$$

jest częstotliwością kołową fali (f — jej częstotliwość),

$$k = 2\pi/\lambda \quad (2.4)$$

jest liczbą falową (λ — długość fali). We wzorach (2.1) i (2.2) przyjęto, że obie fale cząstkowe mają identyczne amplitudy oraz identyczne, równe zero fazy początkowe.

Zgodnie z zasadą superpozycji, wypadkowe drgania cząsteczek powietrza przy wlocie 2 interferometru są opisane równaniem

$$\xi(t) = \xi_a(t) + \xi_b(t), \quad (2.5)$$

czyli

$$\xi(t) = A [\exp(-ikx_a) + \exp(-ikx_b)] \exp(i\omega t). \quad (2.6)$$

Korzystając z wykładniczego przedstawienia liczb zespolonych, powyższe wyrażenie możemy zapisać w postaci

$$\xi(t) = A_w \exp [i(\omega t + \varphi)], \quad (2.7)$$

gdzie A_w i φ oznaczają amplitudę i początkową fazę drgań wypadkowych.

W dalszych rozważaniach wystarczy obliczyć wypadkową amplitudę A_w drgań. Korzystając ze wzoru $|\xi(t)|^2 = \xi(t) \xi^*(t)$, gdzie gwiazdka oznacza sprzężenie zespolone, z ostatnich dwóch równań otrzymujemy związek

$$\begin{aligned} A_w^2 &= A^2 [\exp(-ikx_a) + \exp(-ikx_b)] [\exp(ikx_a) + \exp(ikx_b)] \\ &= A^2 \{2 + \exp [ik(x_b - x_a)] + \exp [ik(x_a - x_b)]\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wprowadzając dla różnicy dróg obu fal oznaczenie

$$\Delta x = x_b - x_a \quad (2.9)$$

i wykorzystując wzór Eulera otrzymamy

$$A_w^2 = 2A^2 [1 + \cos(k\Delta x)]. \quad (2.10)$$

Amplituda A_w przyjmuje największą wartość równą $2A$, gdy

$$k\Delta x_n = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.11)$$

Uwzględniając wzór (2.4), z wyrażenia (2.11) otrzymamy wartości różnicy Δx_n dróg fal, odpowiadające maksimum amplitudy A_w :

$$\Delta x_n = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.12)$$

Podobnie można wykazać, że amplituda $A_w = 0$, gdy różnica dróg fal

$$\Delta x_n = (n + 1/2)\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.13)$$

W obecnym doświadczeniu zmienia się różnicę dróg obu fal przez przesuwanie ruchomej części interferometru. Umożliwia to wyznaczenie długości λ fali dźwiękowej, odpowiadającą danej częstotliwości f . Prędkość c rozchodzenia się fali określa się następnie na podstawie zależności

$$c = \lambda f. \quad (2.14)$$

2.3. Aparatura pomiarowa

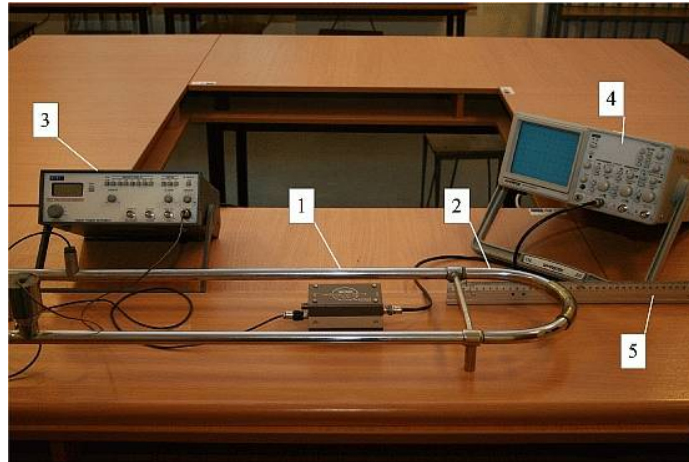
Zastosowaną w ćwiczeniu aparaturę przedstawia rys. 2.2. U wlotu 1 interferometru znajduje się głośnik, zasilany z generatora akustycznego. Ruchoma część interferometru zaopatrzona jest we wskazówkę ze skalą milimetrową, umożliwiającą pomiar jej przesunięcia. U wylotu 2 interferometru znajduje się mikrofon. Przebieg elektryczny z mikrofonu obserwowany jest na ekranie oscyloskopu.

2.4. Zadania

Wyznaczyć długości fal w rurze Quinckego i ich prędkość, odpowiadające różnym częstotliwościom dźwięku, generowanego przez głośnik.

2.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Przed przystąpieniem do pomiarów należy przygotować do pracy generator akustyczny. W tym celu przełącznikiem klawiszowym należy wybrać zakres częstotliwości 2 kHz, natomiast przełącznikiem kształtu wybrać przebieg sinusoidalny. Z kolei pokrętko symetrii przebiegu ustawić w położeniu środkowym, natomiast regulator amplitudy ustawić na 3/4 skali. Regulator wzmocnienia kanału Y oscyloskopu oraz jego podstawy czasu ustawić tak, aby na ekranie widoczny był obraz sygnału dostarczanego przez mikrofon.



Rysunek 2.2. Aparatura do wyznaczania predkości dźwięku w powietrzu. 1 — część nieruchoma, 2 — część ruchoma interferometru, 3 — generator akustyczny, 4 — oscyloskop, 5 — linijka z podziałką milimetrową

W celu określenia wartości prędkości dźwięku należy wykonać serię 10 pomiarów długości fali dźwiękowej, w zakresie częstotliwości $f = 2000 \text{ Hz} - 4000 \text{ Hz}$. Dla uzyskania zadowalającej dokładności pomiarów, na skali przyrządu określamy położenia d_1 i d_n wskazówki, odpowiadające pierwszemu i ostatniemu (n -temu) maksimum oraz pierwszemu i ostatniemu minimum wartości sygnału na ekranie oscyloskopu.

Zgodnie z rys. 2.1, różnica dróg Δx obu fal jest związana z przesunięciem d ruchomego odcinka interferometru zależnością

$$\Delta x = 2d, \quad (2.15)$$

skąd

$$d = \Delta x / 2. \quad (2.16)$$

Ze wzorów (2.12), (2.13) i (2.16) wynika, że różnica sąsiednich położení wskazówki, odpowiadających kolejnym maksimum lub minimum natężenia dźwięku wynosi

$$d_n - d_{n-1} = \frac{\lambda}{2}. \quad (2.17)$$

Różnica n -tego i pierwszego położenia wskazówki wyraża się więc wzorem

$$d_n - d_1 = (n - 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (2.18)$$

Otrzymujemy stąd wzór, umożliwiający obliczenie długości fali dźwiękowej

$$\lambda = \frac{2}{n - 1} (d_n - d_1). \quad (2.19)$$

Aby wyznaczyć prędkość dźwięku należy zauważyć, że wyrażenie (2.14) można zapisać jako

$$\lambda = cf^{-1}. \quad (2.20)$$

Długość fali dźwiękowej jest więc liniową funkcją odwrotności jej częstotliwości, wyrażoną ogólnym wzorem

$$Y = AX + B, \quad (2.21)$$

gdzie $X = f^{-1}$, $Y = \lambda$, $A = c$ i $B = 0$. Wartości parametrów A i B oraz ich odchylenia standardowe S_A i S_B należy określić, aproksymując doświadczalną zależność $\lambda - f^{-1}$ prostą (2.21). Punkty pomiarowe i prostą należy narysować na wykresie. Następnie, korzystając z otrzymanych wyników, określić prędkość $c = A$ dźwięku w powietrzu. Wynik podać z odpowiednią niepewnością, $S_c = S_A$.

W czasie dyskusji otrzymanych wyników zwracamy uwagę na ich zgodność (lub brak) z zależnościami teoretycznymi. Sprawdzamy również, czy różnice pomiędzy literaturową i doświadczalną prędkością dźwięku mieszczą się w granicach wyznaczonych niepewności.

2.6. Wymagane wiadomości

1. Ruch falowy, płaska fala biegnąca i charakteryzujące ją wielkości.
2. Fala stojąca, jej powstawanie, cechy i charakteryzujące ją wielkości.
3. Czynniki wpływające na prędkość fali dźwiękowej w ośrodku stałym i gazowym.

2.7. Literatura

- [1] D. Haliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, cz. 4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
- [2] J. Massalski, M. Massalska — Fizyka dla inżynierów, cz. I Fizyka klasyczna, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2007.

Ćwiczenie 3

Wyznaczanie długości fali światła przy użyciu interferometru Michelsona

3.1. Zasada ćwiczenia

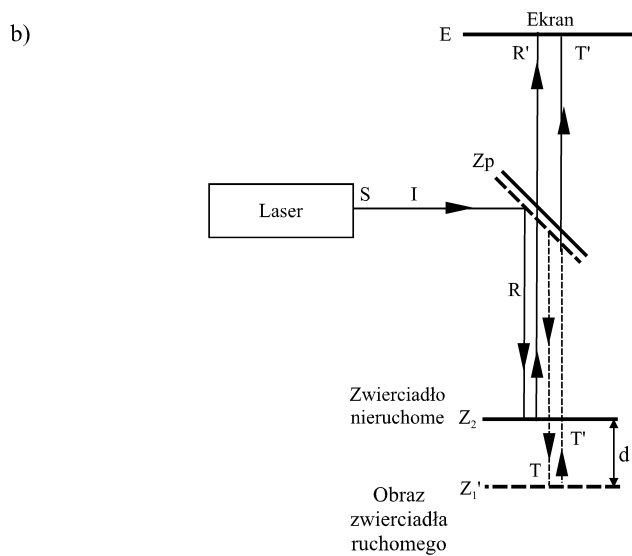
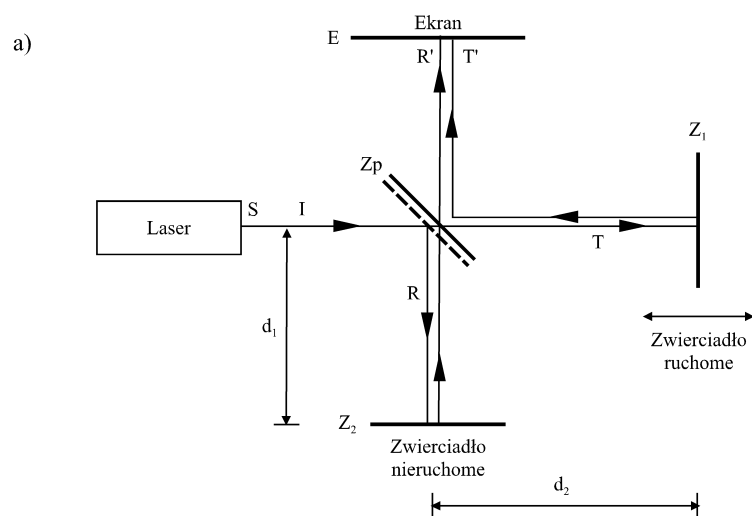
W układzie Michelsona prążki interferencyjne wytwarza się za pomocą dwóch zwierciadeł, z których jedno jest ruchome. Długość fali świetlnej wyznacza się mierząc przesunięcie zwierciadła i obserwując towarzyszącą mu zmianę obrazu interferencyjnego.

3.2. Wiadomości teoretyczne

Interferencją nazywamy zjawisko wzajemnego nakładania się fal. Skutkiem interferencji może być wzajemne osłabianie lub wzmacnianie się fal — zależnie od różnicy ich faz w określonym punkcie przestrzeni. W wypadku wzmacniania się fal mówimy o interferencji konstruktywnej, w wypadku osłabiania — o interferencji destruktywnej. Warunkiem wystąpienia interferencji jest spójność fal, tj. niezależność różnicy ich faz od czasu.

W interferometrze Michelsona używanym w ćwiczeniu (rys. 3.1) wiązka światła I wytwarzana przez laser trafia na półprzepuszczalne lustro Z_p . Lustro to umieszczone jest pod kątem 45° do kierunku wiązki i dzieli ją na dwie części. Część T przepuszczona przez zwierciadło trafia na lustro Z_1 , odbija się od niego i powraca do zwierciadła Z_p . Odbita część T' dociera do ekranu E . Część R wiązki dobiega do zwierciadła Z_2 , odbija się od niego i trafia ponownie na zwierciadło Z_p . Przepuszczona część R' dociera do ekranu. Źródłem prążków obserwowanych w czasie ćwiczenia jest więc interferencja promieni T' i R' .

W celu prześledzenia dróg optycznych interferujących promieni skorzystajmy z rys. 3.1b, który przedstawia nieco zmodyfikowany szkic interferometru. Jak wynika z rysunku, zwierciadło Z_1 zostało zastąpione przez jego obraz Z'_1 , widziany przy spoglądaniu z pozycji otworu lasera w kierunku zwierciadła półprzepuszczalnego. W interferometrze Michelsona zwierciadło Z_2 można przesuwac. Niech różnica odległości zwierciadeł Z_1 i Z_2 od zwierciadła półprzepuszczalnego wyniesie d . Obraz na ekranie E powstanie więc w wyniku interferencji dwóch wiązek wytwarzanych przez jedno źródło S . Pierwsza z nich jest wiązką odbitą przez zwierciadło Z_2 , druga — odbitą przez zwierciadło Z'_1 . Z rysunku łatwo odczytać, że różnica dróg optycznych obu



Rysunek 3.1. Szkice interferometru Michelsona

wiązek wynosi $\Delta x = 2d$, przy czym $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_1, x_2 są odległościami od źródła światła).

Przypomnijmy obecnie, że warunek maksymalnego wzmocnienia amplitudy nakładających się fal świetlnych, tj. istnienia maksimum interferencyjnego, ma postać:

$$\Delta x = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

W eksperymencie interferencyjnym taki rezultat obserwować będziemy w postaci prążków o maksymalnej jasności. Warunek wystąpienia minimum interferencyjnego, tj. wystąpienia prążków ciemnych, ma z kolei postać¹

$$\Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Przeanalizujemy obecnie kształt prążków interferencyjnych obserwowanych w ćwiczeniu (rys. 3.2). Jeśli źródło światła wpadającego do interferometru jest punktowe², bieg promieni można przedstawić jak na rys. 3.2a. Postępując podobnie jak przy tworzeniu rys. 3.1b, możemy naszkicować „zastępczy” układ interferometru z rys. 3.2a. Przedstawia go rys. 3.2b. Punkt S' jest obrazem źródła światła S , widocznym w zwierciadle półprzepuszczalnym, obserwowanym z pozycji zwierciadła Z_2 . Punkt S''_1 jest pozornym obrazem punktu S' w „pozornym” zwierciadle Z'_1 . Z kolei punkt S''_2 jest pozornym obrazem punktu S' w zwierciadle Z_2 . Ponieważ zwierciadła Z'_1 i Z_2 są oddalone od siebie o d , pozorne obrazy punktów S''_1 i S''_2 są oddalone od siebie o $2d$. Punkty te wytwarzają parę koherentnych fal sferycznych o promieniach R_1 i R_2 , zależnych od położenia punktu P (rys. 3.3). Obrazem ich interferencji jest więc zbiór koncentrycznych pierścieni.

Rozpatrzmy obecnie punkt P leżący na n -tym jasnym pierścieniu. Różnica dróg optycznych interferujących fal dana jest wówczas wzorem (3.1). Jak wynika z rys. 3.3, ponieważ $R_1, R_2 \gg d$,

$$\Delta x \approx 2d \cos \theta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

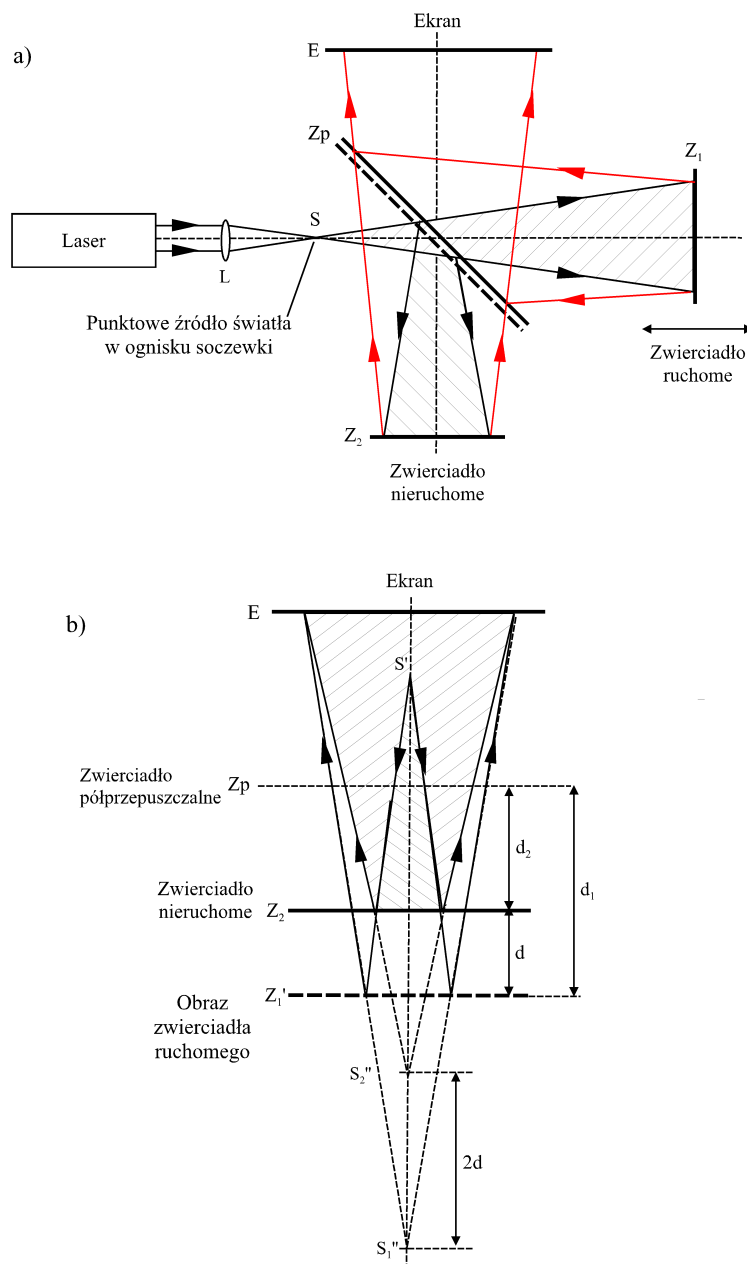
Porównując wyrażenia (3.1) i (3.3) otrzymamy

$$2d \cos \theta_n = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Z powyższego wzoru wynika, że przy ustalonym λ (czerwone światło lasera) i ustalonym n (przy obserwacji na ekranie określonego pierścienia), zmiana d spowoduje zmianę wartości funkcji $\cos \theta_n$. W szczególności, gdy na skutek przemieszczania ruchomego zwierciadła interferometru d będzie maleć, wartość funkcji $\cos \theta_n$ będzie rosła. Oznacza to, że (por. rys. 3.3), że wartość promienia n -tego pierścienia będzie maleć. Zmieniając położenie ruchomego zwierciadła i obserwując stale to samo miejsce na ekranie (stały kąt θ_n i promień r_n), zauważymy pojawianie się w nim naprzemiennie jasnych i ciemnych prążków. Dla wartości kąta $\theta_n \ll 1$ przejście od jasnego do ciemnego prążka i z powrotem do jasnego będzie zachodzić gdy d będzie każdorazowo zmieniać się o $\lambda/2$. Układ prążków zniknie, gdy $d = 0$.

¹ Wyprowadzenie wzorów (3.1) i (3.2) zawiera instrukcja do ćwiczenia pt. „Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu za pomocą interferometru Quinckego”.

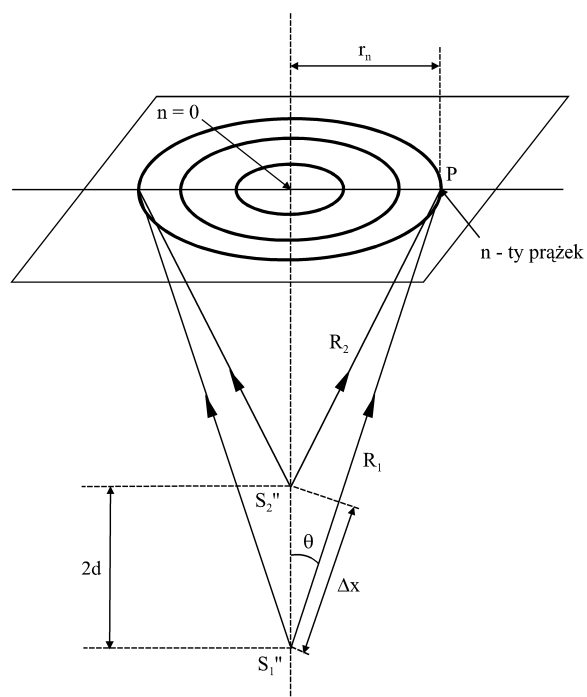
² W ćwiczeniu rolę tę pełni ognisko soczewki umieszczonej między otworem lasera a interferometrem.



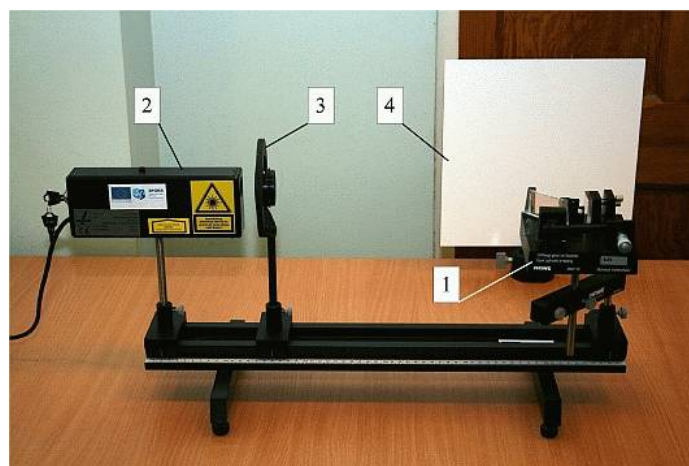
Rysunek 3.2. Powstawanie pierścieni interferencyjnych w interferometrze Michelsona

3.3. Aparatura pomiarowa

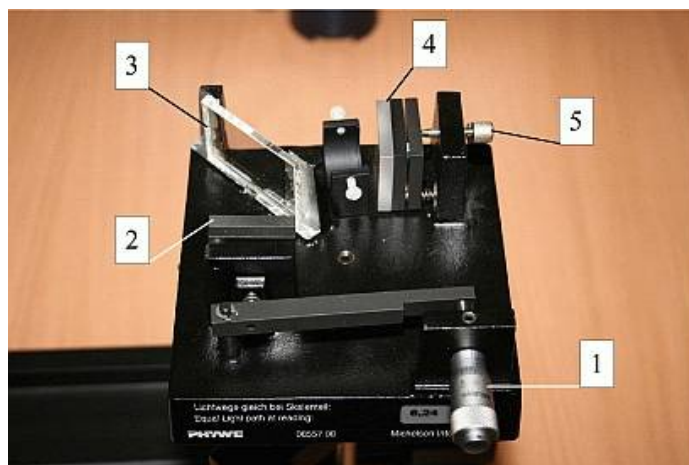
Stosowana w ćwiczeniu aparatura pomiarowa przedstawiona jest na rys. 3.4, natomiast rys. 3.5 przedstawia widok podzespołów interferometru Michelsona. Źródłem



Rysunek 3.3. Obraz na ekranie interferometru



Rysunek 3.4. Aparatura do wyznaczania długości fali światła przy użyciu interferometru Michelsona. 1 — interferometr Michelsona, 2 — laser He-Ne, 3 — soczewka skupiająca, 4 — ekran



Rysunek 3.5. Widok podzespołów interferometru Michelsona. 1 — śruba mikrometryczna, 2 — zwierciadło ruchome, 3 — zwierciadło półprzepuszczalne, 4 — zwierciadło nieruchome, 5 — śruby regulacyjne zwierciadła nieruchomego

światła jest laser He-Ne, oświetlający poprzez soczewkę skupiającą właściwy układ interferometru Michelsona. Konstrukcja interferometru jest zgodna z rys. 3.1a, przy czym zwierciadło przesuwane jest za pomocą precyzyjnej śruby mikrometrycznej. Powstający obraz rzutowany jest na ekran. Wszystkie elementy, poza ekranem, zamocowane są na wspólnej ławie optycznej.

3.4. Zadania

Za pomocą śruby mikrometrycznej określić wielkość przesunięcia zwierciadła interferometru, odpowiadające przejściu n jasnych prążków przez wybrany punkt na ekranie i wyznaczyć długość fali światła laserowego.

3.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Uwaga:

Zabrania się samodzielnego włączania i wyłączenia lasera — może to uczynić wyłącznie prowadzący ćwiczenie. Nigdy nie należy spoglądać w otwór pracującego lasera ani kierować jego światła w stronę oczu. Działanie światła laserowego na oko może spowodować trwałe uszkodzenie siatkówki. W razie ekspozycji należy możliwie najszybciej zasięgnąć porady okulistycznej.

Interferometr jest urządzeniem bardzo delikatnym — z tego względu wszystkie jego elementy optyczne zamknięte są zdejmowalną pokrywą. Niedopuszczalne

jest dotykaniem powierzchni soczewki oraz elementów optycznych we wnętrzu obudowy interferometru.

Przed przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia należy wyregulować układ optyczny. Czynność tę przeprowadza prowadzący ćwiczenie. W celu regulacji układu należy wymontować soczewkę z ławy optycznej, zdjąć pokrywę interferometru i obracając jego obudowę skierować promień lasera pod kątem 45° względem powierzchni zwierciadła półprzepuszczalnego. Przy rozregulowanym układzie optycznym na ekranie będą widoczne dwie plamki świetlne. Używając dwóch wkrętów regulacyjnych mocujących jedno ze zwierciadeł interferometru należy obie plamki sprowadzić na siebie. Następnie umieścić w układzie soczewkę i przesuwać ją wzdłuż ławy uzyskać na ekranie możliwie największy obraz prążków interferencyjnych. Prawidłowo wyregulowany układ powinien wytwarzać zbiór koncentrycznych pierścieni.

Przed rozpoczęciem pomiarów ruchome zwierciadło interferometru powinno zostać ustawione w położeniu początkowym. Dokonujemy tego obracając bardzo powoli śrubą mikrometryczną — aż do uzyskania ciemnego centrum pierścieni. Odczytujemy wówczas położenie d_0 zwierciadła ze skali śruby. Ponieważ zwierciadło jest przesuwane za pośrednictwem dźwigni o stosunku długości ramion 1:10, wskazania śruby należy dzielić przez 10.

Celem wyznaczenia długości fali światła laserowego, należy bardzo powoli obracać śrubę mikrometryczną w tym samym co w czasie regulacji kierunku. Należy liczyć liczbę n cykli zmian jasności środka pierścieni w sekwencji ciemny - jasny - ciemny i odczytywać położenie d_n zwierciadła, np. co 50 cykli. Aby osiągnąć zadowalającą dokładność pomiaru, całkowita liczba cykli powinna być równa co najmniej 500.

Ponieważ jeden cykl zmian jasności odpowiada przesunięciu zwierciadła o odległość $\lambda/2$, bezwzględna wartość przemieszczenia zwierciadła jest proporcjonalna do liczby n cykli, zgodnie ze wzorem

$$|d_n - d_0| = \frac{n\lambda}{2}. \quad (3.5)$$

Wykres zależności $|d_n - d_0|$ — n powinien więc przedstawiać prostą o ogólnym równaniu

$$Y = AX + B, \quad (3.6)$$

przy czym $X = n$, $Y = |d_n - d_0|$, $A = \lambda/2$, $B = 0$. Wartości parametrów A i B oraz ich niepewności S_A i S_B należy wyznaczyć metodą regresji liniowej i następnie narysować odpowiednią prostą na wykresie. Poszukiwana długość fali świetlnej i jej niepewność wyrażają się wzorami $\lambda = 2A$ i $S_\lambda = 2S_A$.

Przeprowadzając dyskusję wyniku porównujemy go z danymi producenta lasera oraz sprawdzamy, czy rozbieżności mieszczą się w granicach wyznaczonej niepewności.

3.6. Wymagane wiadomości

1. Pojęcie spójności światła.
2. Właściwości światła laserowego.
3. Barwa światła a długość jego fali.

4. Pojęcie drogi optycznej.

3.7. Literatura

- [1] D. Haliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, cz. 4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
- [3] S. Szczęniowski — Fizyka doświadczalna, cz. III Optyka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983.

Ćwiczenie 4

Badanie polaryzacji światła przez płytkę ćwierćfalową

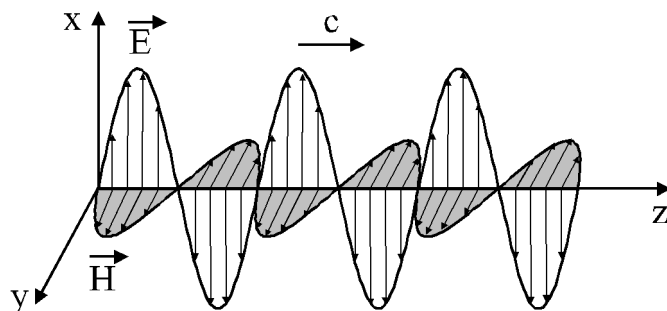
4.1. Zasada ćwiczenia

Promień spolaryzowanego liniowo, monochromatycznego światła pada na płytkę ćwierćfalową (płytkę mikową o grubości równej $1/4$ długości fali światła w mice), prostopadle do jej osi optycznej. Wychodzące z ćwierćfalówki fale tworzące promienie zwyczajny i nadzwyczajny są przesunięte w fazie o kąt $\pi/2$. Bada się polaryzację światła opuszczającego ćwierćfalówkę w zależności od kąta między jej osią optyczną a kierunkiem polaryzacji światła padającego.

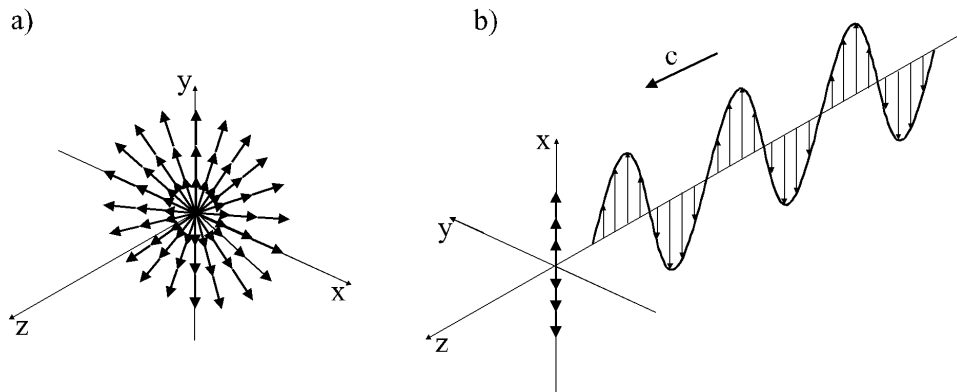
4.2. Wiadomości teoretyczne

4.2.1. Polaryzacja światła

Światło jest falą elektromagnetyczną. Wektory natężenia pola elektrycznego \vec{E} i pola magnetycznego \vec{H} oscylują we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Oba kierunki są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali (rys. 4.1) co oznacza, że fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną. Z uwagi na to, że oko ludzkie oraz wiele urządzeń optycznych reaguje wyłącznie na składową elektryczną fali świetlnej, wektor



Rysunek 4.1. Wektory \vec{E} i \vec{H} fali elektromagnetycznej



Rysunek 4.2. Wiązka światła niespolaryzowanego (a) i spolaryzowanego liniowo (b)

\vec{E} nazywa się wektorem świetlnym. Jak wynika z rys. 4.1, wektor \vec{E} fali wyznacza w przestrzeni pewien kierunek.

Wiązka światła, emitowana z określonego źródła, zawiera dużą liczbę fal składowych. Jeżeli w danym miejscu, do którego dotarło światło, kierunek wektorów świetlnych \vec{E} składowych fal jest jednakowy, światło nazywamy spolaryzowanym. Kierunek ten może być ustalony lub może zmieniać się z czasem w określony sposób. Rodzaj polaryzacji światła określa się na podstawie kształtu figury zakreślonej przez koniec wypadkowego wektora natężenia pola elektrycznego, obserwowanego w danym punkcie przestrzeni. Przyjmuje się przy tym, że wiązka światła rozchodzi się w kierunku obserwatora.

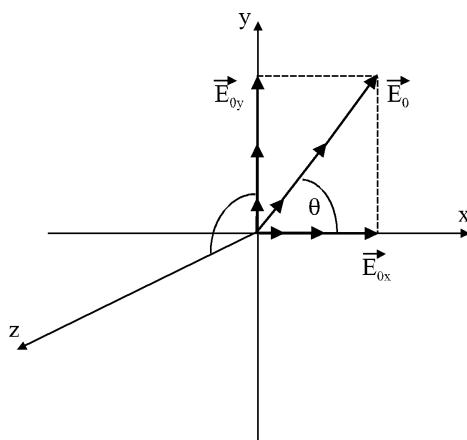
W przypadku niespolaryzowanej wiązki światła kierunki drgań wektorów \vec{E} jej fal składowych zorientowane są przypadkowo w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się (rys. 4.2a). Światło niespolaryzowane wysyłane jest przez większość jego źródeł (np. Słońce, żarówki, świetłówki). W tych źródłach atomy lub cząsteczki emitują światło w sposób nieskorelowany, niezależnie od siebie. Natomiast lasery emitują światło częściowo spolaryzowane.

Polaryzacja liniowa

Rozważmy na wstępie równanie wektora $\vec{E}(z, t)$ fali propagującej z prędkością c w kierunku dodatniej półosi z o następującej postaci (por. rys. 4.1):

$$\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_{0x} \cos(\omega t - kz). \quad (4.1)$$

W podanym równaniu ω jest częstością kołową fali, k — jej liczbą falową, t — czasem. Z powyższego wyrażenia wynika, że kierunek wektora $\vec{E}(z, t)$ pozostaje równoległy do osi x , natomiast jego długość oscyluje w zakresie $-E_{0x}$, E_{0x} . Falę taką nazywamy

Rysunek 4.3. Orientacja płaszczyzny drgań wektora \vec{E} o dwóch składowych

spolaryzowaną liniowo¹. Przedstawia ją rys. 4.2b (punkt obserwacji fali znajduje się na osi z).

Rozpatrzmy obecnie falę, w której pole elektryczne ma dwie składowe — jedną skierowaną wzdłuż osi x , drugą wzdłuż osi y , o identycznych fazach:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{j}E_{0y} \cos(\omega t - kz). \quad (4.2)$$

Równanie tej fali możemy przepisać w postaci:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz), \quad (4.3)$$

gdzie wektor

$$\vec{E}_0 = \vec{i}E_{0x} + \vec{j}E_{0y}. \quad (4.4)$$

Jak wynika z dwóch ostatnich wzorów, kierunek wektora \vec{E}_0 i kierunek drgań wektora $\vec{E}(z, t)$ fali wypadkowej nie zmienia się w czasie. Kierunek ten zależy od wartości amplitud E_{0x} i E_{0y} jej fal składowych (rys. 4.3). Przykładowo, jeżeli $E_{0x} = E_{0y}$ wektor pola elektrycznego fali wypadkowej skierowany jest pod kątem $\Theta = \pi/4$ względem osi x . Ogólnie można więc stwierdzić, że w wyniku superpozycji dwóch liniowo spolaryzowanych w prostopadłych kierunkach fal elektromagnetycznych, mających jednakowe fazy, powstaje fala spolaryzowana liniowo. Kąt polaryzacji fali wypadkowej jest określony wzorem (por. rys. 4.3)

$$\Theta = \arctg \left(\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right). \quad (4.5)$$

¹ Ze względów historycznych za płaszczyznę polaryzacji liniowo spolaryzowanej fali (światła) przyjęto płaszczyznę prostopadłą do wektora \vec{E} . W rozważanym przykładzie fala jest więc spolaryzowana w płaszczyźnie yz . Podana definicja płaszczyzny polaryzacji może powodować nieporozumienia i termin ten nie będzie stosowany w obecnej instrukcji.

Podobnie można pokazać, że w przypadku superpozycji dwóch fal o prostopadłych kierunkach drgań wektora elektrycznego i przeciwnych (różniących się o π) fazach powstaje także fala spolaryzowana liniowo. Kąt polaryzacji tej fali jest dany wzorem

$$\Theta = \arctg \left(-\frac{E_{0y}}{E_{0x}} \right). \quad (4.6)$$

Polaryzacja eliptyczna i polaryzacja kołowa

Rozpatrzmy obecnie ogólniejszy przypadek, gdy w fali elektromagnetycznej istnieją dwie składowe wektora $\vec{E}(z, t)$: równoległa do osi x oraz równoległa do osi y , przy czym składowa w kierunku osi y wyprzedza w fazie składową w kierunku osi x o kąt φ . Falę taką przedstawia równanie:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{i}E_{0x} \cos(\omega t - kz) + \vec{j}E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (4.7)$$

W celu uproszczenia dalszych wzorów ustalmy, że obserwację wektora $\vec{E}(z, t)$ prowadzić będziemy w punkcie $z = 0$. Z równania (4.7) otrzymamy wówczas

$$\vec{E}(t) = \vec{i}E_{0x} \cos \omega t + \vec{j}E_{0y} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.8)$$

gdzie $\vec{E}(t) \equiv \vec{E}(0, t)$. Z powyższego wyrażenia wynika, że postać wypadkowej fali zależy od wartości E_{0x} , E_{0y} oraz φ . Rozpatrzmy teraz kilka charakterystycznych przypadków.

Przypadek 1. $E_{0x} \neq E_{0y}$, $\varphi = -\pi/2$.

Równanie pola elektrycznego przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \vec{i}E_{0x} \cos \omega t + \vec{j}E_{0y} \cos(\omega t - \pi/2) \\ &= \vec{i}E_{0x} \cos \omega t + \vec{j}E_{0y} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Składowe wektora pola elektrycznego są więc równe

$$E_x(t) = E_{0x} \cos \omega t, \quad E_y(t) = E_{0y} \sin \omega t. \quad (4.10)$$

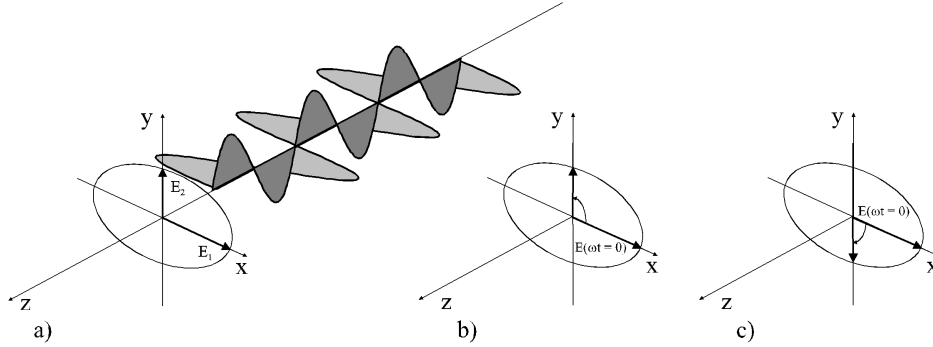
Na podstawie wzorów (4.10) możemy otrzymać wzór

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t, \quad (4.11)$$

czyli

$$\frac{E_x^2(t)}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{0y}^2} = 1. \quad (4.12)$$

Powyższe równanie jest równaniem elipsy, której osie główne są skierowane wzdłuż osi x i y układu współrzędnych. Elipsa ta w miarę upływu czasu jest zakresłana przez koniec wektora $\vec{E}(t)$ o składowych $E_x(t)$ i $E_y(t)$ na płaszczyźnie xy . Fala jest więc spolaryzowana eliptycznie (rys. 4.4a). Aby określić kierunek rotacji wektora $\vec{E}(t)$,



Rysunek 4.4. Fala spolaryzowana eliptycznie (a), polaryzacja eliptyczna lewoskrętna (b), polaryzacja eliptyczna prawoskrętna (c)

podstawmy np. kolejno $\omega t = 0$ oraz $\omega t = \pi/2$. Z równania (4.9) otrzymamy wówczas

$$\vec{E}(0) = iE_{0x}, \quad \vec{E}(\pi/2) = jE_{0y}. \quad (4.13)$$

Wraz ze zmianą argumentu ωt w zakresie od 0 do $\pi/2$, wektor $\vec{E}(t)$ obrócił się przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara: od pozycji w kierunku dodatniej półosi x do pozycji w kierunku dodatniej półosi y (rys. 4.4b). Falę taką nazywamy spolaryzowaną lewoskrętnie.

Przypadek 2. $E_{0x} \neq E_{0y}$, $\varphi = \pi/2$.

Postępując jak powyżej otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= iE_{0x} \cos \omega t + jE_{0y} \cos(\omega t + \pi/2) \\ &= iE_{0x} \cos \omega t - jE_{0y} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4.14)$$

z którego wynika wzór identyczny ze wzorem (4.12). W celu określenia kierunku wirowania wektora $\vec{E}(t)$ wybierzmy ponownie dwie wartości argumentu: $\omega t = 0$ oraz $\omega t = \pi/2$. Podstawiając je do równania (4.14) otrzymamy

$$\vec{E}(0) = iE_{0x}, \quad \vec{E}(\pi/2) = -jE_{0y}. \quad (4.15)$$

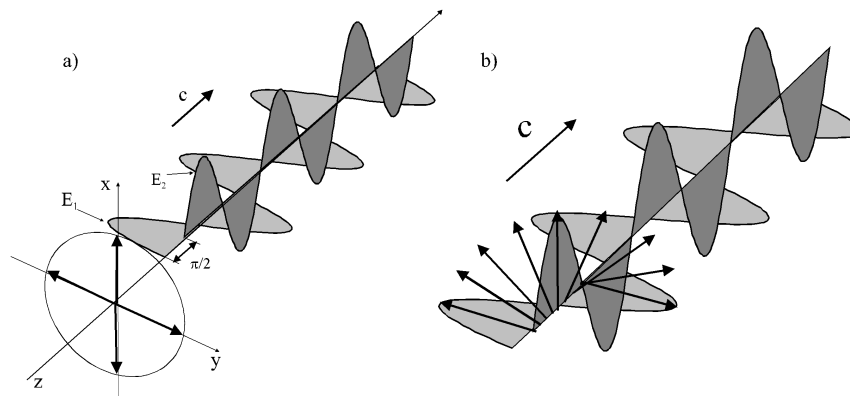
Z powyższych wzorów wynika, że przy zmianie ωt w zakresie od 0 do $\pi/2$, kierunek wektora $\vec{E}(t)$ zmienia się od półosi x do półosi $-y$. Fala taka nazywa się spolaryzowaną prawoskrętnie (rys. 4.4c).

Przypadek 3. $E_{0x} = E_{0y}$, $\varphi = -\pi/2$.

Podstawiając $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, z równania (4.12) otrzymamy

$$E_x^2(t) + E_y^2(t) = E_0^2, \quad (4.16)$$

tj. równanie okręgu. Fala jest więc spolaryzowana kołowo i jak w przypadku 1 ma polaryzację lewoskrętną (por. rys. 4.4b dla $E_{0x} = E_{0y}$).



Rysunek 4.5. Poglądowy rysunek fali spolaryzowanej kołowo lewoskrętnie.

Przypadek 4. $E_{0x} = E_{0y}$, $\varphi = \pi/2$.

Na podstawie rozważań podobnych do przeprowadzonych dla przypadków 2 i 3 stwierdzamy, że jest to fala o polaryzacji kołowej prawoskrętnej (por. rys. 4.4c dla $E_{0x} = E_{0y}$).

Warto zaznaczyć, że polaryzacja kołowa jest szczególnym przypadkiem polaryzacji eliptycznej. Przypadek ten przedstawiono poglądowo na rys. 4.5.

Na zakończenie rozważmy przypadek dowolnego przesunięcia fazy pomiędzy składowymi wektora $\vec{E}(t)$. Mamy wówczas do czynienia z falami spolaryzowanymi eliptycznie (lub kołowo, jeżeli amplitudy fal składowych są te same). Koniec wektora $\vec{E}(t)$ zakreśla wówczas elipsy, których osie nie pokrywają się z osiami x i y układu współrzędnych.

4.2.2. Polaryzator i płytka ćwierćfalowa

Polaryzatorem nazywamy przyrząd przekształcający światło niespolaryzowane w światło spolaryzowane liniowo. Najczęściej w polaryzatorach wykorzystuje się zjawisko podwójnego załamania światła, zachodzące w przezroczystych kryształach anizotropowych (o własnościach optycznych zależnych od kierunku w kryształach). Padający promień świetlny rozdziela się wewnątrz kryształu na dwa promienie — zwyczajny i nadzwyczajny, rozchodzące się z różnymi prędkościami, przy czym prędkość promienia nadzwyczajnego zależy od kierunku. Oba promienie są spolaryzowane liniowo we wzajemnie prostopadłych kierunkach. Wybierając jeden z tych promieni, uzyskuje się na wyjściu z kryształu światło liniowo spolaryzowane.

Płytka ćwierćfalowa (ćwierćfalówka) służy do przekształcenia światła spolaryzowanego liniowo w światło spolaryzowane eliptycznie lub kołowo. Stanowi ją cienka warstwa wykonana z anizotropowego kryształu (np. z miki) o tak dobranej grubości, że pomiędzy promieniem nadzwyczajnym a zwyczajnym opuszczającym warstwę po-

wstaje różnica faz $\pi/2$ lub $3\pi/2$. Różnica faz pojawia się na skutek różnych prędkości propagacji promienia nadzwyczajnego i zwyczajnego, wywołanej anizotropią optyczną kryształu. Grubość płytki ćwierćfalowej wyznacza się ze wzorów

$$d_{\lambda/4} = \frac{\lambda}{4(n_z - n_n)}, \quad (4.17)$$

$$d_{3\lambda/4} = \frac{3\lambda}{4(n_z - n_n)}, \quad (4.18)$$

w których n_z i n_n są odpowiednio współczynnikami załamania promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego, λ — długością fali, przy której ma pracować ćwierćfalówka. Kierunki drgań wektora elektrycznego promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego, zwane azymutami, oznaczone są zwykle na oprawce ćwierćfalówki. Ćwierćfalówkę oświetla się światłem spolaryzowanym liniowo, przy czym:

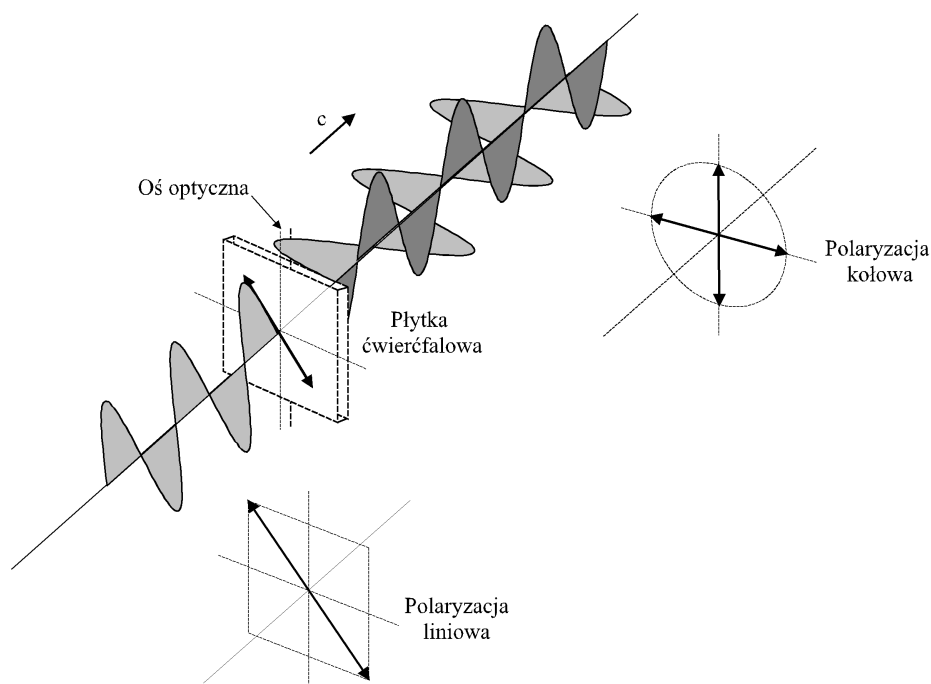
1. Jeżeli kierunek drgań wektora świetlnego padającego światła jest równoległy do jednego z azymutów, światło opuszczające płytkę jest nadal spolaryzowane liniowo. Zależnie od wybranego azymutu, z płytki wychodzi promień zwyczajny lub promień nadzwyczajny.
2. Jeżeli kierunek drgań padającego promienia świetlnego tworzy z azymutami różne od zera kąty, promień ulega rozszczepieniu na składową zwyczajną i nadzwyczajną o różnych amplitudach. Wskutek nakładania się obydwu składowych, światło opuszczające płytkę jest spolaryzowane eliptycznie. Gdy różnica faz wytwarzana przez ćwierćfalówkę wynosi $\pi/2$, elipsa obiegana jest w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Jeżeli różnica faz wynosi $3\pi/2$, elipsa obiegana jest w kierunku przeciwnym.
3. Jeśli w szczególności kierunek drgań padającego promienia świetlnego tworzy z azymutami kąt $\pi/4$, amplitudy promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego są równe i światło opuszczające płytkę jest spolaryzowane kołowo — rys. 4.6.

4.3. Aparatura pomiarowa

Stosowaną w ćwiczeniu aparaturę przedstawiono na rys. 4.7.

Elementy optyczne zestawu przymocowane są do płyty optycznej za pomocą uchwytów magnetycznych. Zasilany ze specjalnego zasilacza laser He-Ne emituje wiązkę czerwonego światła, która za pomocą zwierciadła, poprzez soczewkę, kierowana jest do polaryzatora. Po opuszczeniu polaryzatora światło przechodzi przez płytkę ćwierćfalową i trafia do drugiego polaryzatora, pełniącego funkcję analizatora. Polaryzatory i płytkę ćwierćfalowa zaopatrzone są w uchwyty ze skalami kątowymi, umożliwiającymi płynną zmianę ich położenia. Światło opuszczające analizator — poprzez soczewkę — kierowane jest do fotokomórki pomiarowej. Sygnał z fotokomórki, który jest proporcjonalny do natężenia padającego na nią światła, po wzmocnieniu przez wzmacniacz pomiarowy, steruje woltomierzem wskazówkowym.

² Innymi słowy, różnica dróg optycznych wymienionych promieni wynosi $1/4$ lub $3/4$ długości fali światła.



Rysunek 4.6. Powstawanie światła spolaryzowanego kołowo w płytce ćwierćfalowej

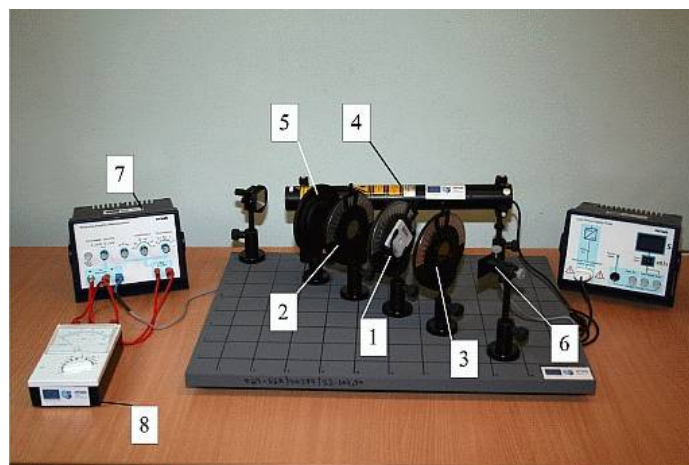
4.4. Zadania

Zmierzyć natężenie wiązki światła opuszczającego analizator w funkcji kąta pomiędzy jego płaszczyzną polaryzacji a osią optyczną ćwierćfalówki. Pomiary przeprowadzić przy różnych kątach pomiędzy osią optyczną ćwierćfalówki a płaszczyzną polaryzacji polaryzatora.

4.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Uwaga:

Zabrania się samodzielnego włączania i wyłączania lasera — może to uczynić wyłącznie prowadzący ćwiczenie. Nigdy nie należy spoglądać w otwór pracującego lasera ani kierować jego światła w stronę oczu. Działanie światła laserowego na oko może spowodować trwałe uszkodzenie siatkówki. W razie ekspozycji należy możliwie najszybciej zasięgnąć porady okulistycznej. Używany w ćwiczeniu zestaw optyczny składa się z bardzo delikatnych elementów. Niedopuszczalne jest dotykanie powierzchni soczewki, polaryzatorów oraz płytki ćwierćfalowej, która jest bardzo krucha. Elementy można przesuwać po stole wyłącznie ujmując je za uchwyty magnetyczne.



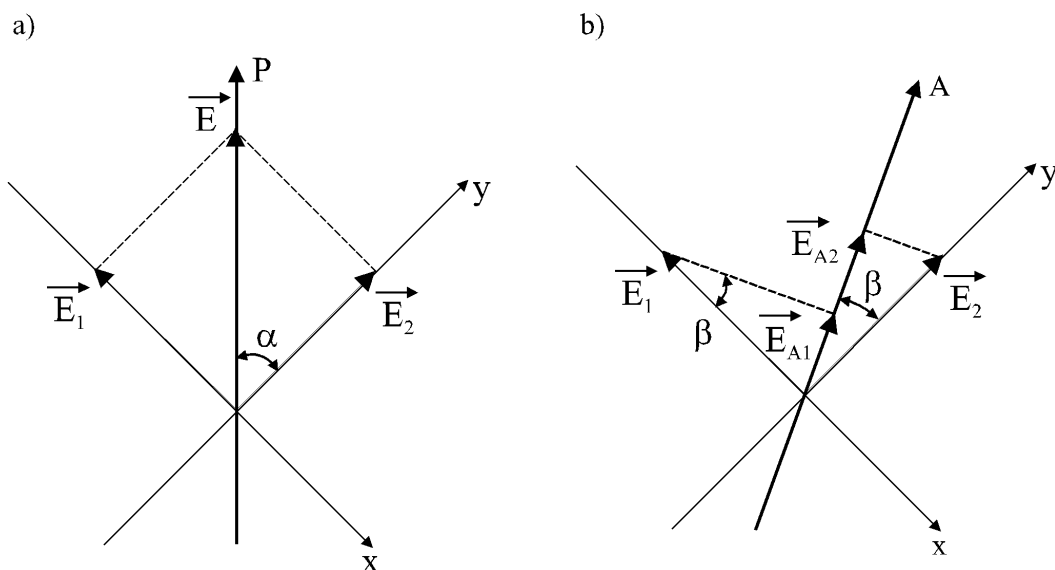
Rysunek 4.7. Aparatura do badania polaryzacji światła przez płytkę ćwierćfalową. 1 — płytkę ćwierćfalową, 2 — polaryzator, 3 — analizator, 4 — laser He-Ne, 5 — soczewka, 6 — fotokomórka, 7 — wzmacniacz sygnału fotokomórki, 8 — woltomierz sygnału fotokomórki

Przed przystąpieniem do pomiarów należy sprawdzić i skorygować osiowe ustawienie soczewki, polaryzatorów, ćwierćfalówki i obudowy fotokomórki. Należy również prawidłowo ustawić regulatory wzmacniacza pomiarowego. Pokrętło rodzaju wejścia musi znajdować się w położeniu „Low drift”, pokrętło zerowania — w pozycji środkowej. Przełącznik wzmocnienia powinien być nastawiony na wartość 10^2 , pokrętło stałej czasowej — na wartość 0 s. Następnie należy prawidłowo zorientować oś optyczną ćwierćfalówki względem płaszczyzny polaryzacji polaryzatora. W tym celu usuwamy ćwierćfalówkę i wskaźnik położenia polaryzatora ustawiamy na 0° . Następnie, obracając uchwytem analizatora, uzyskujemy minimum natężenia opuszczającej go wiązki światła. Należy wówczas umieścić ćwierćfalówkę w osi polaryzator-analizator i obracając jej uchwytem osiągnąć ponownie minimum natężenia światła docierającego do fotokomórki³. Płaszczyzna polaryzacji światła opuszczającego polaryzator będzie wówczas pod kątem 0° (lub 90°) w stosunku do osi optycznej płytki ćwierćfalowej.

Aby przeprowadzić właściwe pomiary należy — przy zerowym położeniu ćwierćfalówki — wykonać serię pomiarów napięcia fotokomórki dla różnych pozycji wskaźnika analizatora, poczynając od -90° (uchwyt odchylony w lewo patrząc od strony fotokomórki) do 90° (uchwyt odchylony w prawo), ze skokiem 5° . Analogiczne pomiary należy przeprowadzić przy wskaźniku ustawienia ćwierćfalówki wskazującym 30° , 45° , 60° i 90° .

Rodzaj polaryzacji światła opuszczającego ćwierćfalówkę określa się na podstawie kształtu uzyskanych krzywych. Na rys. 4.8 przedstawiono przykładową orientację osi optycznej ćwierćfalówki i płaszczyzny polaryzacji analizatora A względem płaszczyzny

³ Wskaźniki położenia płytki, polaryzatora i analizatora powinny wskazywać zero.



Rysunek 4.8. Przykładowa orientacja osi optycznej ćwierćfalówki i płaszczyzny polaryzacji analizatora A względem płaszczyzny polaryzacji polaryzatora P . Azymuty ćwierćfalówki pokrywają się z osiami x i y

polaryzacji polaryzatora P (kąty α i β). Na rysunku zaznaczono także promienie normalny i anomalny, opuszczające ćwierćfalówkę. Dalej rozważymy zależność natężenia wiązki światła na wyjściu układu pomiarowego od kątów α i β . Będziemy zakładać, że polaryzatory i ćwierćfalówka są idealnie przezroczyste — nie pochłaniają padającego na nie światła.

Promień liniowo spolaryzowanego światła, padającego na ćwierćfalówkę, możemy rozdzielić na dwa liniowo spolaryzowane promienie o kierunkach drgań odpowiadających azymutom ćwierćfalówki i o identycznych fazach drgań. Jeden z promieni przechodzących przez ćwierćfalówkę stanie się promieniem zwyczajnym, a drugi — nadzwyczajnym. Promienie te będą przesunięte względem siebie w fazie o kąt $\pi/2$. Przyjmijmy, że natężenie $\vec{E}(t)$ pola elektrycznego promienia padającego na ćwierćfalówkę jest określone wzorem

$$E(t) = E_0 \cos \omega t. \quad (4.19)$$

Natężenia pól elektrycznych $\vec{E}_1(t)$ i $\vec{E}_2(t)$ wychodzących promieni możemy znaleźć, rzutując wektor $\vec{E}(t)$ na kierunki azymutów ćwierćfalówki (por. rys. 4.8a) i uwzględniając zmianę fazy jednego z promieni o $\pi/2$. Otrzymujemy stąd wzory⁴

$$E_1(t) = E(t - \pi/2\omega) \sin \alpha, \quad (4.20)$$

⁴ W dalszych wzorach będziemy pomijać dodatkowe, identyczne przesunięcia fazowe obu promieni, wynikające ze skończonej grubości ćwierćfalówki i analizatora oraz ze skończonej odległości między nimi.

$$E_2(t) = E(t) \cos \alpha, \quad (4.21)$$

czyli, uwzględniając wzór (4.19),

$$E_1(t) = E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - \pi/2) = E_0 \sin \alpha \sin \omega t, \quad (4.22)$$

$$E_2(t) = E_0 \cos \alpha \cos \omega t. \quad (4.23)$$

W celu znalezienia wyrażenia, opisującego pole elektryczne $\vec{E}_A(t)$ wiązki opuszczającej analizator, rozdzielmy z kolei każdy z promieni na składowe o kierunkach drgań równoległych i prostopadłych do kierunku drgań promienia wychodzącego z analizatora. Przez analizator będą przechodzić tylko składowe o równoległych kierunkach drgań. Natężenia pól elektrycznych $\vec{E}_{A1}(t)$ i $\vec{E}_{A2}(t)$ składowych promieni otrzymujemy rzutując wektory $\vec{E}_1(t)$ i $\vec{E}_2(t)$ na ten kierunek. Są one równe (por. rys. 4.8b)

$$E_{A1}(t) = E_1(t) \sin \beta, \quad (4.24)$$

$$E_{A2}(t) = E_2(t) \cos \beta. \quad (4.25)$$

Podstawiając wyrażenia (4.22) i (4.23) do dwóch ostatnich wzorów, uzyskujemy

$$E_{A1}(t) = E_0 \sin \alpha \sin \beta \sin \omega t, \quad (4.26)$$

$$E_{A2}(t) = E_0 \cos \alpha \cos \beta \cos \omega t. \quad (4.27)$$

Ponieważ kierunki drgań wektorów $\vec{E}_{A1}(t)$ i $\vec{E}_{A2}(t)$ są jednakowe, wypadkowe natężenie pola wiązki wychodzącej z analizatora

$$E_A(t) = E_0 (\sin \alpha \sin \beta \sin \omega t + \cos \alpha \cos \beta \cos \omega t). \quad (4.28)$$

Powyższe wyrażenie przedstawia superpozycję dwóch drgań równoległych, przesuniętych względem siebie w fazie o kąt $\pi/2$. Wiadomo, że w tym przypadku kwadrat amplitudy E_{0A} drgania wypadkowego jest równy sumie kwadratów amplitud drgań składowych. Otrzymujemy więc

$$E_{0A}^2 = E_0^2 (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta). \quad (4.29)$$

Natężenie światła jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy pola elektrycznego fali. Jeżeli natężenie światła padającego na ćwierćfalówkę i natężenie światła wychodzącego z analizatora oznaczymy odpowiednio przez I_0 i I_A , to zachodzą relacje:

$$I_0 \sim E_0^2, \quad I_A \sim E_{0A}^2, \quad (4.30)$$

z tym samym współczynnikiem proporcjonalności. Ze wzoru (4.29) otrzymujemy zatem:

$$I_A = I_0 (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta). \quad (4.31)$$

Napięcie U_f , uzyskiwane z fotokomórki i wskazywane przez woltomierz jest proporcjonalne do wartości natężenia wychodzącej wiązki. Możemy więc zapisać, że

$$U_f \sim I_0 (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta). \quad (4.32)$$

Rozważmy obecnie postać wzoru (4.31) przy różnych orientacjach ćwierćfalówki względem polaryzatora, odpowiadającym kątom α stosowanym w czasie pomiarów:

1. $\alpha = 0^\circ$ lub $\alpha = 90^\circ$:

$$I_A = I_0 \cos^2 \beta \text{ lub } I_A = I_0 \sin^2 \beta \quad (4.33)$$

(prawo Malusa).

2. $\alpha = 30^\circ$:

$$I_A = \frac{I_0}{4} (\sin^2 \beta + 3 \cos^2 \beta). \quad (4.34)$$

3. $\alpha = 45^\circ$:

$$I_A = \frac{I_0}{2}. \quad (4.35)$$

4. $\alpha = 60^\circ$:

$$I_A = \frac{I_0}{4} (3 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta). \quad (4.36)$$

W celu określenia rodzaju polaryzacji światła opuszczającego ćwierćfalówkę należy we wspólnym układzie współrzędnych $U_f - \beta$ nanieść punkty pomiarowe a następnie aproksymować je zależnościami (4.33) - (4.36). Otrzymane wyniki przedyskutować.

4.6. Wymagane wiadomości

1. Właściwości światła laserowego.
2. Pojęcie anizotropii optycznej — kryształy dwójłomne.
3. Sposoby otrzymywania światła spolaryzowanego.
4. Przechodzenie światła przez układ złożony z polaryzatora i analizatora, prawo Malusa.

4.7. Literatura

- [1] D. Haliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, cz. 4, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
- [3] S. Szczeniowski — Fizyka doświadczalna, cz. III Optyka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983.

Ćwiczenie 5

Badanie szeregowego i równoległego obwodu RLC

5.1. Zasada ćwiczenia

Obwód RLC składa się z rezystora, cewki indukcyjnej i kondensatora, w zależności od jego konfiguracji — połączonych szeregowo bądź równoległe. Badany obwód zasila się z generatora przebiegu sinusoidalnego. Przy różnych wartościach elementów składowych obwodu mierzy się napięcia i natężenia prądu w funkcji częstotliwości sygnału zasilającego.

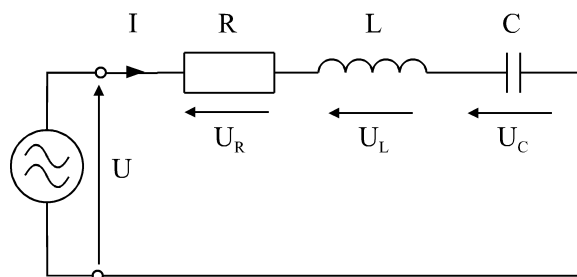
5.2. Wiadomości teoretyczne

5.2.1. Szeregowy obwód RLC

Przyjmując fazę początkową prądu w obwodzie równą zero, zespolone napięcia na poszczególnych elementach obwodu (rys. 5.1) wyrazimy następującymi wzorami:

$$U_R = RI, \quad (5.1)$$

$$U_L = \omega LI \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i\omega LI = iX_L I, \quad (5.2)$$



Rysunek 5.1. Schemat ideowy szeregowego obwodu RLC

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = -\frac{i}{\omega C} I = -iX_C I, \quad (5.3)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$ jest częstotliwością kołową (pulsacją) przy częstotliwości f . W powyższych wyrażeniach uwzględniliśmy fakt, że napięcie na rezystancji jest w fazie z prądem, napięcie na indukcyjności wyprzedza prąd o kąt fazowy $\pi/2$, zaś napięcie na pojemności opóźnia się względem prądu o kąt fazowy $\pi/2$. Napięcie U na zaciskach obwodu jest sumą geometryczną napięć na poszczególnych elementach:

$$U = U_R + U_L + U_C. \quad (5.4)$$

Równanie (5.4) przedstawia zespoloną postać drugiego prawa Kirchhoffa dla tego obwodu¹. Podstawiając zależności (5.1) - (5.3) do równania (5.4) otrzymamy

$$U = RI + iX_L I - iX_C I = I [R + i(X_L - X_C)]. \quad (5.5)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest impedancją zespoloną obwodu:

$$Z = R + i(X_L - X_C) = R + iX. \quad (5.6)$$

Część rzeczywista impedancji jest rezystancją, część urojona — reaktancją obwodu. Wyrażając impedancję zespoloną w postaci wykładniczej napiszemy:

$$Z = |Z| \exp(i\varphi). \quad (5.7)$$

W powyższym wzorze $|Z|$ jest modulem impedancji, φ — jej argumentem (kątem fazowym), przy czym

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad (5.8)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \operatorname{tg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}, \quad (5.9)$$

$$R = |Z| \cos \varphi, \quad X = |Z| \sin \varphi. \quad (5.10)$$

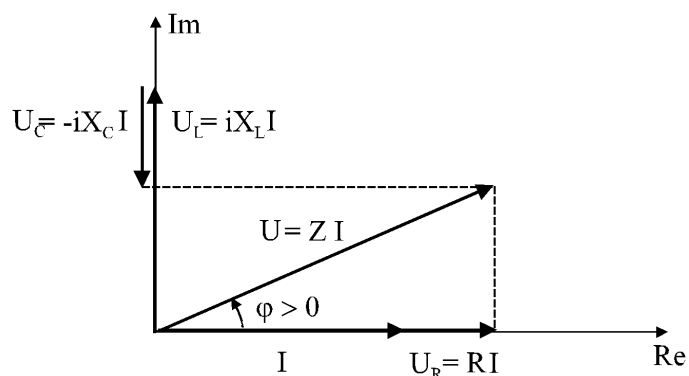
Podstawiając wyrażenia (5.6) do wzoru (5.5) otrzymamy równanie

$$U = ZI, \quad (5.11)$$

będące prawem Ohma dla wartości skutecznych zespolonych. Na rys.5.2 przedstawiono przykładowy wykres wektorowy prądu oraz napięć w szeregowym obwodzie RLC . Wraz ze wzrostem częstotliwości reaktancja indukcyjna X_L wzrasta liniowo, natomiast reaktancja pojemnościowa maleje hiperbolicznie. Przy małych częstotliwościach w obwodzie płynie mały prąd, wyprzedzający napięcie o kąt bliski $\pi/2$ — obwód ma wówczas charakter pojemnościowy. Przy dużych częstotliwościach w obwodzie płynie prąd o niskim natężeniu, opóźniony względem napięcia o kąt $\pi/2$. Obwód ma wówczas charakter indukcyjny. Zjawisko rezonansu występuje w takim stanie pracy obwodu, w którym jego reaktancja X jest równa zero, tzn. gdy

$$X_L = X_C. \quad (5.12)$$

¹ Suma wektorów wartości skutecznej napięć źródłowych w oczku równa jest sumie wektorów wartości skutecznej napięć na wszystkich elementach oczka.

Rysunek 5.2. Wykres wektorowy prądu oraz napięć w szeregowym obwodzie RLC

W przypadku obwodu szeregowego mówimy o rezonansie napięć. Pulsację, przy której spełniony jest warunek (5.12) nazywamy pulsacją rezonansową i wyrażamy wzorem (por. wyrażenia (5.2) i (5.3)):

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.13)$$

W stanie rezonansu szeregowego słuszne są następujące zależności:

$$\begin{aligned} Z &= R, \\ U &= U_R, \\ U_L + U_C &= 0, \\ U_L &= U_C. \end{aligned} \quad (5.14)$$

W przypadku rezonansu nie ma przesunięcia fazowego między prądem i napięciem. Obwód zachowuje się tak, jakby istniała w nim tylko rezystancja — natężenie prądu jest ograniczone jedynie jej wartością.

Impedancja falowa ρ jest reaktancją indukcyjną lub pojemnościową przy pulsacji rezonansowej, $\omega = \omega_r$:

$$\rho = \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.15)$$

Dobroć Q obwodu określana jest zależnością

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{U_C}{U_R}, \quad (5.16)$$

z której wynika

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r C R}; \quad (5.17)$$

po uwzględnieniu wzoru (5.15) otrzymujemy

$$Q = \frac{\rho}{R}. \quad (5.18)$$

Podsumowując powyższe rozważania można moduły napięć na elementach reaktancyjnych obwodu opisać zależnościami

$$U_L = \omega_r L \frac{U}{R}, \quad (5.19)$$

$$U_c = \frac{1}{\omega_r C} \frac{U}{R}. \quad (5.20)$$

Ponieważ w stanie rezonansu oba moduły napięć są sobie równe, ze wzorów (5.19), (5.20), (5.15) oraz (5.18) otrzymamy

$$U_L = U_c = QU. \quad (5.21)$$

Dobroć obwodu Q wskazuje więc, ile razy napięcie na indukcyjności (lub napięcie na pojemności) jest większe od napięcia na zaciskach obwodu².

Miarą ostrości rezonansu jest tzw. szerokość pasma przepustowego (przenoszenia) obwodu. Pasmem tym nazywa się przedział pulsacji, dla których wartość skuteczna $I(\omega)$ prądu w obwodzie (przy założeniu stałej wartości skutecznej napięcia przyłożonego do obwodu) maleje nie więcej niż $\sqrt{2}$ krotnie w stosunku do wartości prądu w rezonansie I_r :

$$\frac{I(\omega)}{I_r} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (5.22)$$

W przypadku dolnej (ω_d) i górnej (ω_g) pulsacji (częstotliwości) granicznej pasma spełniona jest równość

$$\frac{I_r}{I(\omega_d)} = \frac{I_r}{I(\omega_g)} = \sqrt{2}. \quad (5.23)$$

Szerokość pasma przenoszenia zdefiniowana jest więc wzorem (por. rys. 5.3):

$$\Delta\omega = \omega_g - \omega_d. \quad (5.24)$$

Wyznaczona w ten sposób szerokość pasma może posłużyć do wyznaczenia dobroci obwodu na podstawie jego krzywej rezonansowej:

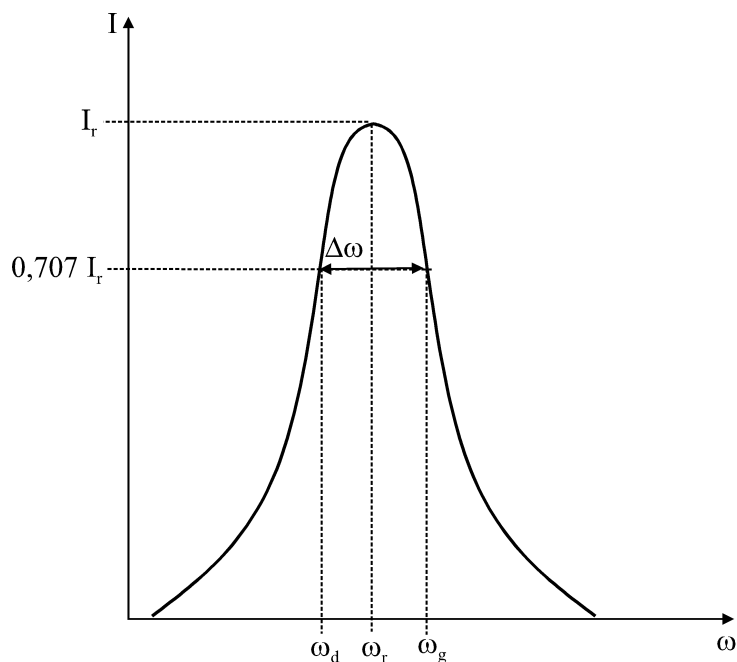
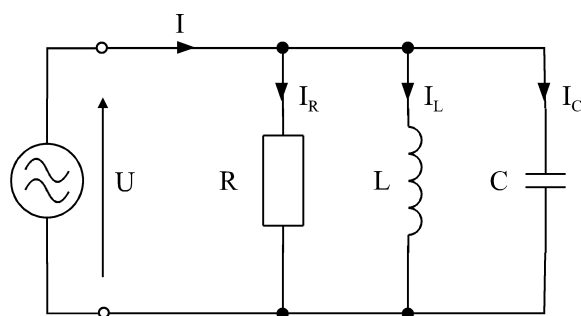
$$\Delta\omega = \frac{\omega_r}{Q}. \quad (5.25)$$

Jeżeli do opisu stosunku wartości wielkości fizycznych używa się skali logarytmicznej wyrażonej w decybelach (dB), to tłumieniu o wartości $\sqrt{2}$ na granicach pasma odpowiada wartość -3dB ($20 \lg \sqrt{2} = 3,0103002 \approx 3$ dB).

5.2.2. Równoległy obwód RLC

Przyjmując fazę początkową napięcia w obwodzie równą zero, zespolone napięcia na poszczególnych elementach obwodu (rys. 5.3) wyrazimy następującymi wzorami:

² Jeśli rezystancja obwodu jest mała, to dobroć obwodu jest duża i napięcie na elementach reaktancyjnych znacznie przekracza wartość napięcia przyłożonego do obwodu. Mówimy wówczas o przepięciu. W warunkach przepięcia może dojść do przebicia kondensatora lub izolacji cewki.

Rysunek 5.3. Krzywa rezonansowa i pasmo przenoszenia szeregowego obwodu RLC Rysunek 5.4. Schemat ideowy równoległego obwodu RLC

$$I_R = GU, \quad (5.26)$$

$$I_L = \frac{1}{\omega L} U \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = -\frac{i}{\omega L} U = -iB_L U, \quad (5.27)$$

$$I_C = \omega C U \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i\omega C U = iB_C U. \quad (5.28)$$

W powyższych wzorach $G = 1/R$ jest konduktancją, B_L — susceptancją indukcyjną, B_C — susceptancją pojemnościową. Uwzględniliśmy w nich także fakt, że prąd

płynący przez gałąź rezystancyjną jest w fazie z napięciem, prąd płynący przez gałąź indukcyjną opóźnia się względem napięcia o kąt fazowy $\pi/2$ a prąd w gałęzi pojemnościowej wyprzedza napięcie o kąt fazowy $\pi/2$. Prąd I dopływający do obwodu jest sumą geometryczną prądów płynących przez poszczególne gałęzie:

$$I = I_R + I_L + I_C. \quad (5.29)$$

Równanie (5.29) przedstawia zespoloną postać pierwszego prawa Kirchhoffa dla tego obwodu³. Podstawiając zależności (5.26) - (5.28) do równania (5.29) otrzymamy

$$I = GU + iB_C U - iB_L U = U [G + i(B_C - B_L)] \quad (5.30)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest admitancją zespoloną obwodu:

$$Y = G + i(B_C - B_L) = G + iB. \quad (5.31)$$

Część rzeczywista admitancji jest konduktancją, część urojona — susceptancją obwodu. Wyrażając admitancję zespoloną w postaci wykładniczej napiszemy:

$$Y = |Y| \exp(-i\varphi). \quad (5.32)$$

W powyższym wzorze $|Y|$ jest modulem admitancji (mierzonym w simensach), φ — jej argumentem (kątem fazowym), przy czym

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad (5.33)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{B}{G} = \frac{B_C - B_L^{-1}}{G}, \quad (5.34)$$

$$G = |Y| \cos \varphi, \quad B = |Y| \sin \varphi. \quad (5.35)$$

Znak minus we wzorach (5.32) i (5.31) pochodzi stąd, że przez kąt przesunięcia fazowego rozumiemy różnicę faz napięcia i prądu. Podstawiając wyrażenia (5.31) do wzoru (5.30) otrzymamy równanie

$$I = YU \quad (5.36)$$

będące prawem Ohma w postaci admitancyjnej. Na rys.5.4 przedstawiono przykładowy wykres wektorowy prądów oraz napięcia w równoległym obwodzie RLC .

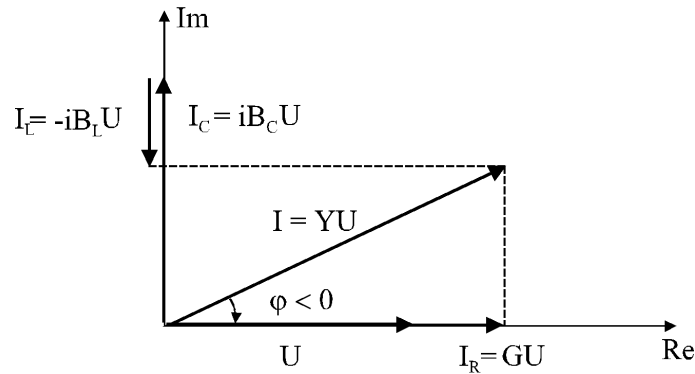
Zjawisko rezonansu występuje w takim stanie pracy obwodu, w którym jego susceptancja B jest równa zeru, tzn. gdy

$$B_C = B_L. \quad (5.37)$$

W przypadku obwodu równoległego mówimy o rezonansie prądów. Pulsację, przy której spełniony jest warunek (5.37) nazywamy pulsacją rezonansową i wyrażamy wzorem (por. wyrażenia (5.27) i (5.28)):

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.38)$$

³ Suma wektorów wartości skutecznej prądów dopływających do węzła równa jest sumie wektorów wartości skutecznej prądów odpływających od węzła.

Rysunek 5.5. Wykres wektorowy prądów oraz napięcia w równoległym obwodzie RLC

Zwróćmy uwagę, że pulsacje rezonansowe równoległego i szeregowego obwodu RLC dane są tym samym wzorem. W stanie rezonansu równoległego słuszne są następujące zależności:

$$\begin{aligned} Y &= G, \\ I &= I_R, \\ I_L + I_C &= 0, \\ I_L &= I_C. \end{aligned} \quad (5.39)$$

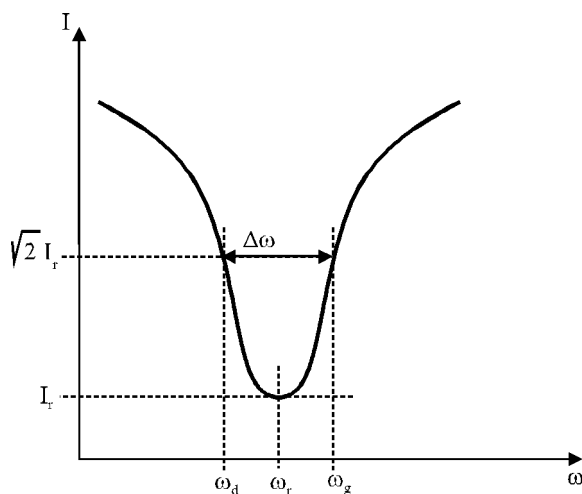
Z powyższych rozważań wynika, że w miarę zbliżania się do pulsacji rezonansowej moduł admitancji obwodu maleje do wartości równej jego konduktancji G , przy czym kąt przesunięcia fazowego dąży do zera. W przypadku pulsacji mniejszej od rezonansowej susceptancja wypadkowa jest mniejsza od zera, przesunięcie fazowe jest większe od zera, a obwód ma charakter indukcyjny. W przypadku pulsacji większych od rezonansowej susceptancja wypadkowa jest mniejsza od zera, a kąt przesunięcia fazowego jest mniejszy od zera — obwód ma charakter pojemnościowy. W stanie rezonansu nie ma przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a prądem, $\varphi = 0$. Ponieważ $B = 0$, prąd w obwodzie osiąga wartość minimalną. Obwód rezonansowy przedstawia dla źródła napięcia wyłącznie opór czynny. Przy $G = 0$ obwód w rezonansie przedstawia dla źródła napięcia opór nieskończenie wielki.

Dobroć Q obwodu równoległego definiuje się jako

$$Q = \frac{I_L}{I_R} = \frac{I_C}{I_R} = \frac{1}{\omega_r L G} = \frac{\omega_r C}{G}. \quad (5.40)$$

Uwzględniając wzór na pulsację rezonansową ω_r , z powyższej zależności otrzymujemy

$$Q = R \left(\frac{L}{C} \right)^{-1/2} = \frac{R}{\rho}, \quad (5.41)$$



Rysunek 5.6. Krzywa rezonansowa i pasmo przenoszenia równoległego obwodu RLC

gdzie ρ jest impedancją falową daną wzorem (5.15). Możemy zatem napisać, że

$$I_L = \frac{IR}{\omega_r L} = I_C = \omega_r C I R = \frac{R}{\rho} I = QI. \quad (5.42)$$

Dobroć obwodu wskazuje więc, że prąd w gałęzi indukcyjnej lub pojemnościowej jest Q razy większy od prądu dopływającego do obwodu⁴. Na rys.5.6 przedstawiono krzywą rezonansu i pasmo przenoszenia równoległego obwodu RLC . Podobnie jak w przypadku obwodu szeregowego, wyznaczona na podstawie krzywej szerokość pasma może posłużyć do określenia dobroci (por. wzór (5.25))

5.3. Aparatura pomiarowa

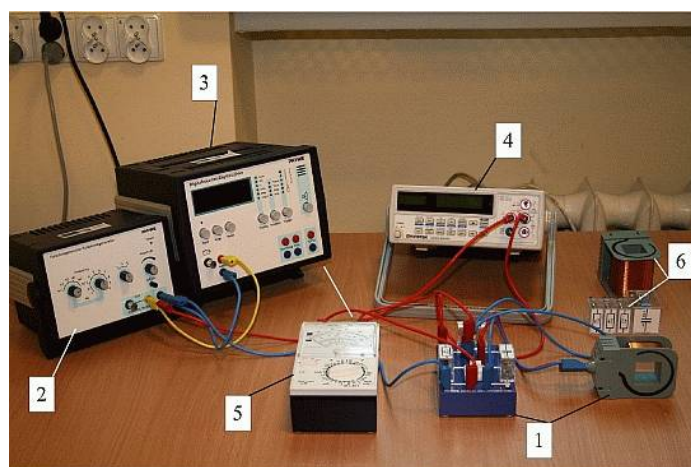
Stosowana w ćwiczeniu aparatura pomiarowa pokazana jest na rys. 5.7. W jej skład wchodzi: generator sygnałowy, częstotściomierz cyfrowy (licznik uniwersalny), miernik uniwersalny z odczytem analogowym (wskazówkowy), miernik uniwersalny z odczytem cyfrowym, zestaw cewek, rezystorów i kondensatorów oraz płytka połączeniowa.

5.4. Zadania

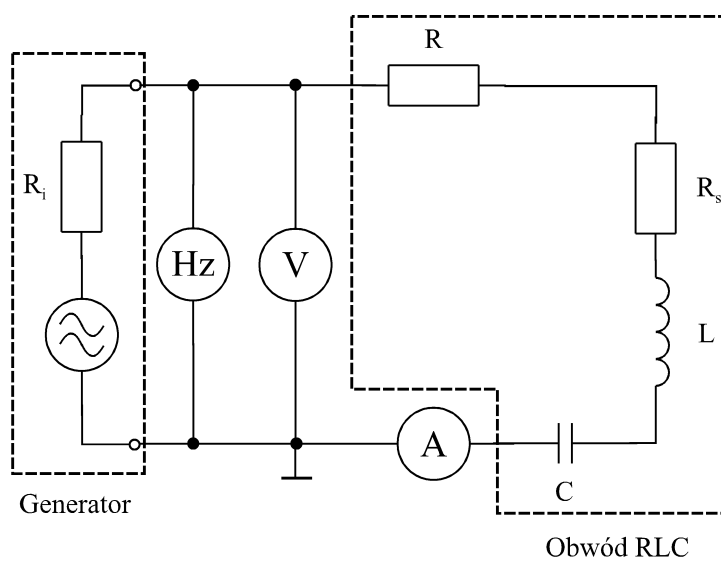
Określić zależności częstotliwościowe prądu i napięcia dla różnych wartości:

1. Rezystora szeregowego (tłumiącego) w szeregowym obwodzie RLC .
2. Rezystora równoległego w równoległym obwodzie RLC .

⁴ Mówimy wówczas o zjawisku przetężenia.



Rysunek 5.7. Aparatura pomiarowa do badania obwodów RLC . 1 — obwód RLC wraz z płytka montażową, 2 — generator sygnałowy, 3 — częstotściomierz (licznik uniwersalny), 4,5 — mierniki uniwersalne, 6 — zamiennne elementy RLC



Rysunek 5.8. Uproszczony schemat ideowy układu do badania szeregowego obwodu RLC

5.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

ad 1. Zestawić układ pomiarowy wg schematu na rys. 5.8. Wartości elementów: $C = 0,1 \mu\text{F}$, cewka o 300 zwojach, $R = 47 \Omega$. Funkcję woltomierza pełni multi-

metr analogowy, funkcję amperomierza — multimetr cyfrowy. Uwaga: amperomierz należy dołączać od strony masy generatora. Na schemacie przedstawiono, występujące w rzeczywistości, oporność wewnętrzną generatora R_i oraz zastępczą oporność R_s uzwojenia cewki, kondensatora i przewodów połączeniowych. Ich istnienie należy uwzględnić dokonując wymaganych obliczeń.

Przed przystąpieniem do pomiarów należy przygotować do pracy generator sygnałowy oraz licznik uniwersalny. W tym celu do gniazd wyjściowych generatora należy podłączyć woltomierz, np. miernik analogowy. Pokrętko „DC-offset” ustawić w położeniu, przy którym napięcie stałe na wyjściu generatora jest możliwie bliskie zeru (woltomierz musi być przełączony na pomiar napięć stałych!). Następnie przełączyć woltomierz na pomiar napięć zmiennych i ustawić napięcie wyjściowe na poziomie 3 - 4 V. Pokrętko mnożnika częstotliwości ustawić na wartość 10^3 , pokrętko przełącznika kształtu przebiegu na symbol sinusoidy. Przełącznik funkcji licznika uniwersalnego nastawić na pomiar częstotliwości.

Po podłączeniu obwodu RLC wykonać serię pomiarów prądów przy stałym napięciu sygnału, $U = const$, w funkcji jego częstotliwości. Pomiarów wykonać dla $R = 47 \Omega$, 10Ω i 0Ω (zwarcie gniazd rezystora odcinkiem przewodu). Przedstawić na wspólnym wykresie zależności $I - f$. Na podstawie wykresów określić szerokość pasma przenoszenia Δf . Porównać i przedyskutować otrzymane wyniki. Następnie dla każdego z przypadków wyznaczyć wartość zastępczej rezystancji R_s kondensatora, uzwojenia cewki i przewodów połączeniowych. Należy pamiętać, że całkowita rezystancja w obwodzie spełnia zależność

$$R_c = R + R_s + R_i, \quad (5.43)$$

gdzie $R_i = 80,5 \Omega$ jest oporem wewnętrznym generatora. W rachunku niepewności wykorzystać wyrażenie

$$\Delta R_s = \left| \frac{\Delta U}{I} \right| + \left| -\frac{U}{I^2} \Delta I \right| + |\Delta R| + |-\Delta R_i|, \quad (5.44)$$

gdzie wartości ΔU , ΔI , ΔR , ΔR_i wynikają z klasy dokładności mierników oraz tolerancji rezystora. Korzystając następnie z wyznaczonych graficznie szerokości pasm przenoszenia obwodów, dla każdego z przypadków wyznaczyć dobroć Q i porównać ją z wynikiem obliczeń na podstawie wartości użytych w doświadczeniu elementów (indukcyjność cewki $L = 1 \text{ mH}$). Niepewność wartości Q obliczyć ze wzoru:

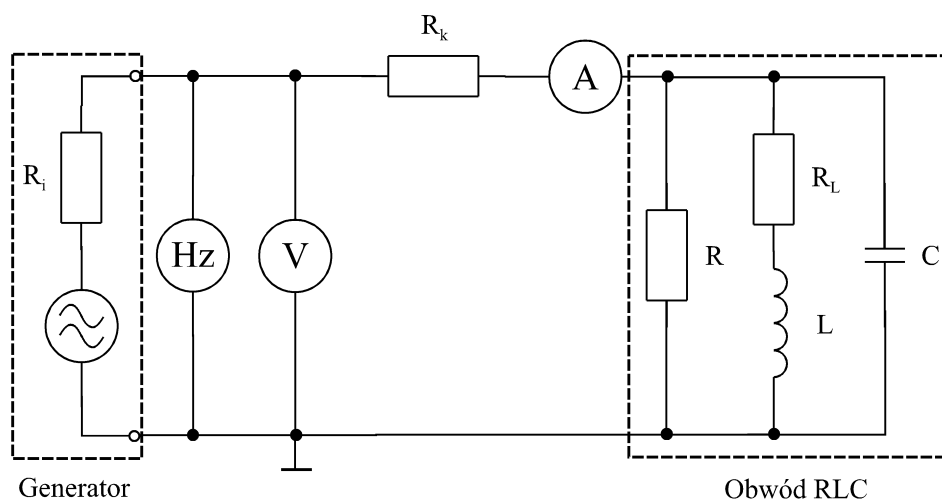
$$\Delta Q = \left| -\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R_c^2} \Delta R_c \right| + \left| \frac{C^{3/2}}{2R_c\sqrt{L}} \Delta L \right| + \left| -\frac{\Delta C}{2R_c\sqrt{LC}} \right|, \quad (5.45)$$

gdzie

$$\Delta R_c = \Delta R + \Delta R_s + \Delta R_i, \quad (5.46)$$

natomiast wartości ΔL i ΔC wynikają z tolerancji zastosowanych elementów.

ad. 2. Zestawić układ pomiarowy wg schematu na rys. 5.9. Wartości elementów: $R_k = 1 \text{ k}\Omega$, $R = 470 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, cewka o 300 zwojach. Funkcję woltomierza pełni multimetr analogowy (z odczytem wskazówkowym), funkcję amperomierza — multimetr



Rysunek 5.9. Uproszczony schemat ideowy układu do badania równoległego obwodu RLC

cyfrowy. Amperomierz należy włączać do układu za rezystorem sprzęgającym R_k . Na schemacie ujęto także opór R_L uzwojenia cewki (opór kondensatora, rzędu setek $M\Omega$ można w tym przypadku pominąć). Istnienie R_L należy uwzględnić dokonując wymaganych obliczeń.

Po podłączeniu obwodu RLC wykonać serię pomiarów prądów przy stałym napięciu sygnału, $U = const$, w funkcji jego częstotliwości. Pomiarów wykonać dla $R = 470 \Omega$, $1 k\Omega$ oraz $R = \infty$ (otwarte gniazda rezystora). Na wspólnym wykresie przedstawić zależności $I - f$. Na podstawie wykresów określić szerokość pasma przenoszenia Δf . Porównać i przedyskutować otrzymane wyniki. Następnie dla każdego z przypadków wyznaczyć konduktancję G_L cewki indukcyjnej L . Należy pamiętać, że w obwodzie równoległym całkowita konduktancja elementów spełnia zależność

$$G_c = G_R + G_L. \quad (5.47)$$

Niepewność wyznaczonej konduktancji obliczamy ze wzoru

$$\Delta G_L = \left| \frac{\Delta I}{U} \right| + \left| -\frac{I}{U^2} \Delta U \right| + |-\Delta G_R|, \quad (5.48)$$

w którym wartości ΔU , ΔI , ΔG_R wynikają z klasy dokładności mierników oraz tolerancji rezystora. Korzystając z obliczonej konduktancji wyznaczyć wartość rezystancji R_L , przy czym

$$\frac{\Delta R_L}{R_L} = \frac{\Delta G_L}{G_L}. \quad (5.49)$$

Wykorzystując następnie wyznaczone graficznie szerokości pasm przenoszenia obwodów wyznaczyć dobroci Q — w sposób analogiczny do obwodu szeregowego RLC . Przy obliczaniu niepewności stosujemy wzór

$$\Delta Q = \left| \frac{\Delta R_c}{\sqrt{L/C}} \right| + \left| -\frac{R_c \sqrt{C}}{2L^{3/2}} \Delta L \right| + \left| \frac{R_c}{2\sqrt{L^3 C}} \Delta C \right|, \quad (5.50)$$

w którym za ΔR_c należy przyjąć

$$\Delta R_c = \Delta R_L + \Delta R, \quad (5.51)$$

przy czym

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta G_R}{G_R}. \quad (5.52)$$

W dyskusji otrzymanych wyników należy zwrócić uwagę na ich zgodność (lub jej brak) z zależnościami teoretycznymi. M. in. sprawdzić, czy różnice między wartościami teoretycznymi i doświadczalnymi parametrów mieszczą się w granicach oszacowanych niepewności.

5.6. Wymagane wiadomości

1. Wielkości charakteryzujące prąd zmienny.
2. Cewka, kondensator i rezystor w obwodzie prądu zmiennego.
3. Wykresy wektorowe w obwodach prądu zmiennego.

5.7. Literatura

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, t. 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] E.M. Purcell — Elektryczność i magnetyzm, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974.

Ćwiczenie 6

Badanie stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym linii transmisyjnej

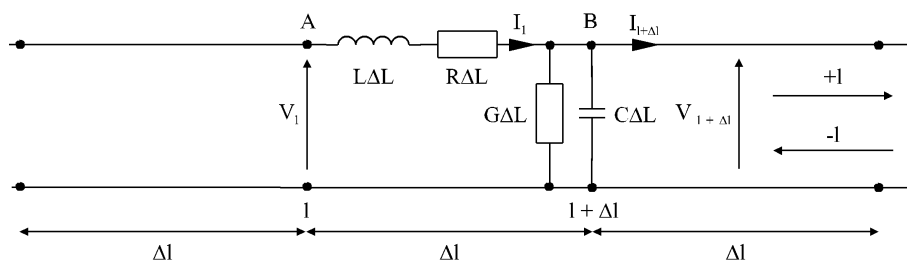
6.1. Zasada ćwiczenia

Odcinek linii transmisyjnej, utworzonej z odcinka kabla koncentrycznego o znanej długości zasilany jest prądem sinusoidalnie zmiennym o określonej częstotliwości. Mierzony jest rozkład fali stojącej wzdłuż linii przy różnych wartościach impedancji na jej końcu.

6.2. Wiadomości teoretyczne

Linia transmisyjną nazywamy układ dwóch przewodników o dowolnej konfiguracji, przedzielonych izolatorem (np. materiałem dielektrycznym). W praktyce może ona mieć postać np. kabla dwużyłowego, używanego do podłączenia odbiorników prądu z domową siecią elektryczną lub koncentrycznego kabla, używanego w technice telewizyjnej.

Założmy, że w linii porusza się fala płaska, w której wektory natężenia pola elektrycznego i magnetycznego są prostopadłe do siebie oraz kierunku poruszania się fali. Ponieważ linia składa się z dwóch przewodników oddzielonych od siebie izolatorem, możemy mówić o jej rezystancji i indukcyjności szeregowej oraz konduktancji i pojemności równoległej. Przyjmijmy teraz, że linia transmisyjna składa się z dużej liczby segmentów o długości Δl (rys. 6.1). Zgodnie z rysunkiem, R, L, C, G oznaczają odpowiednio rezystancję, indukcyjność, pojemność i konduktancję przypadającą na



Rysunek 6.1. Jeden z n segmentów modelujących linię transmisyjną

odcinek linii o jednostkowej długości. Wówczas iloczyny $R\Delta l$, $L\Delta l$, $C\Delta l$, $G\Delta l$ oznaczają odpowiednio rezystancję, indukcyjność, pojemność i konduktancję odcinka linii o długości Δl . Wynika stąd, że całkowita impedancja szeregowo odcinka linii dana jest wyrażeniem

$$Z = R\Delta l + i\omega L\Delta l \quad (6.1)$$

(ω jest pulsacją sygnału zasilającego linię). Podobnie, całkowitą admitancję równoległą segmentu linii określa wzór

$$Y = G\Delta l + i\omega C\Delta l. \quad (6.2)$$

Parametry (6.1) i (6.2) mogą połużyć do „budowy” linii transmisyjnej o dowolnej długości (długość odcinka Δl musi być mała w stosunku do długości fali propagującej w linii). Zastosujemy obecnie prawa Kirchhoffa do jednego z segmentów linii. Analizując odcinek AB otrzymujemy

$$V(l + \Delta l) - V(l) = -I(l) [R\Delta l + i\omega L\Delta l], \quad (6.3)$$

skąd, po podzieleniu stronami, otrzymujemy

$$\frac{V(l + \Delta l) - V(l)}{\Delta l} = -I(l) [R + i\omega L]. \quad (6.4)$$

Wielkość po lewej stronie możemy zastąpić pochodną napięcia, jeżeli tylko $\Delta l \rightarrow 0$. Zapiszemy wówczas

$$\frac{dV(l)}{dl} = -I(l) [R + i\omega L]. \quad (6.5)$$

Równość (6.5) jest słuszna w dowolnym punkcie linii. Napiszmy obecnie równanie „prądowe”:

$$I(l + \Delta l) - I(l) = -V(l + \Delta l) [G\Delta l + i\omega C\Delta l] \quad (6.6)$$

skąd, po analogicznych do powyższych przekształceniach, otrzymamy

$$\frac{dI(l)}{dl} = -V(l + \Delta l) [G + i\omega C]. \quad (6.7)$$

Przyjmując, że

$$V(l + \Delta l) \approx V(l), \quad (6.8)$$

równanie (6.7) można zapisać w postaci analogicznej do równania (6.5):

$$\frac{dI(l)}{dl} = -V(l) [G + i\omega C]. \quad (6.9)$$

Równania (6.5) i (6.9) stanowią równania linii transmisyjnej. Są to dwa sprzężone równania różniczkowe pierwszego rzędu. Można z nich otrzymać oddzielne równania opisujące $V(l)$ oraz $I(l)$. Przekształćmy w tym celu równanie (6.5) do postaci

$$I(l) = -\frac{dV(l)}{dl} \frac{1}{R + i\omega L}. \quad (6.10)$$

Po podstawieniu (6.10) do (6.9) otrzymamy

$$\frac{d^2 V(l)}{dl^2} - V(l) [G + i\omega C] [R + i\omega L] = 0. \quad (6.11)$$

Podobnie, wyliczając $V(l)$ z równania (6.9) i podstawiając do (6.5), otrzymujemy

$$\frac{d^2 I(l)}{dl^2} - I(l) [G + i\omega C] [R + i\omega L] = 0. \quad (6.12)$$

Równania (6.11) i (6.12) można przepisać w postaci

$$\frac{d^2 V(l)}{dl^2} - \gamma^2 V(l) = 0 \quad (6.13)$$

oraz

$$\frac{d^2 I(l)}{dl^2} - \gamma^2 I(l) = 0, \quad (6.14)$$

gdzie

$$\gamma = \alpha + i\beta = \sqrt{[G + i\omega C] [R + i\omega L]}. \quad (6.15)$$

Równanie (6.13) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu opisującym napięcie, równanie (6.14) — prąd w linii transmisyjnej. Czynniki α i β są zespoloną stałą propagacji; α jest stałą tłumienia, β — stałą fazową. Rozwiązania równań (6.13) i (6.14) można zapisać w postaci

$$V(l) = V^+ \exp(-\gamma l) + V^- \exp(\gamma l) \quad (6.16)$$

oraz

$$I(l) = I^+ \exp(-\gamma l) + I^- \exp(\gamma l). \quad (6.17)$$

Ponieważ stała propagacji γ jest liczbą zespoloną (6.15), równania (6.16) i (6.17) można przepisać w postaci

$$V(l) = V^+ \exp(-\alpha l) \exp(-i\beta l) + V^- \exp(\alpha l) \exp(i\beta l), \quad (6.18)$$

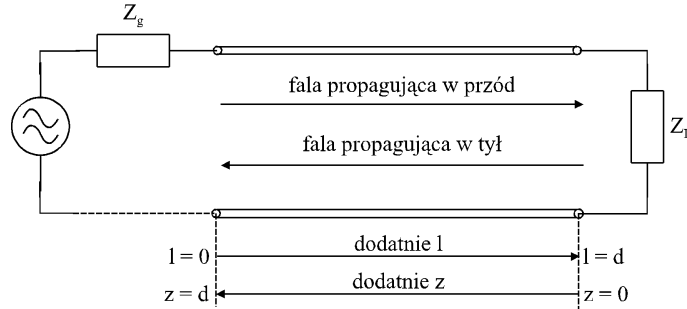
$$I(l) = I^+ \exp(-\alpha l) \exp(-i\beta l) + I^- \exp(\alpha l) \exp(i\beta l). \quad (6.19)$$

Przebiegi czasowe napięcia i natężenia prądu otrzymamy mnożąc równania (6.18) i (6.19) przez czynnik $\exp(i\omega t)$, w którym t oznacza czas,

$$V(l, t) = V^+ \exp(-\alpha l) \exp[i(\omega t - \beta l)] + V^- \exp(\alpha l) \exp[i(\omega t + \beta l)], \quad (6.20)$$

$$I(l, t) = I^+ \exp(-\alpha l) \exp[i(\omega t - \beta l)] + I^- \exp(\alpha l) \exp[i(\omega t + \beta l)]. \quad (6.21)$$

Pierwszy i drugi składnik po prawej stronie wzoru (6.20) przedstawiają fale napięcia, poruszające się odpowiednio w kierunku $+l$ oraz $-l$ (por. rys. 6.1). Podobnie, składniki po prawej stronie wzoru (6.21) przedstawiają fale prądu. Amplitudy wszystkich fal są tłumione wykładniczo.



Rysunek 6.2. Linia transmisyjna o skończonej długości

Z postaci wzorów (6.20) i (6.21) widać, że stała fazowa β jest liczbą falową biegnących w linii fal, związaną z ich długością λ wzorem

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.22)$$

Prędkość fazowa rozchodzących się w linii fal wyraża się więc wzorem

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}. \quad (6.23)$$

Zaznaczmy jeszcze, że wielkość βl (wyrażana w radianach) jest tzw. długością elektryczną linii.

Impedancję charakterystyczną (falową) Z_0 linii transmisyjnej definiujemy wyrażeniem:

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+}. \quad (6.24)$$

i wyrażamy w omach. Jak można wykazać, dana jest ona formułą

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}. \quad (6.25)$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że impedancja Z_0 zależy wyłącznie od parametrów linii, a nie np. od jej lokalizacji czy też długości. Wobec powyższego, prąd płynący w linii, dany np. równaniem (6.17), można opisać wyrażeniem

$$I(l) = \frac{V^+}{Z_0} \exp(-\gamma l) - \frac{V^-}{Z_0} \exp(\gamma l). \quad (6.26)$$

Rozpatrzmy obecnie linię transmisyjną o skończonej długości l . Linia jest zasilana przez generator o impedancji Z_g . Jej obciążenie stanowi impedancja Z_L (rys. 6.2). Przyjmijmy dla wygody, że dodatni kierunek osi z będzie biegł od końca linii w kierunku generatora. Oznacza to, że fala biegnąca od generatora do obciążenia będzie

poruszała się przeciwnie do osi z , a fala odbita — w kierunku zgodnym z osią z . W związku z powyższym, równania (6.16) i (6.17) można przepisać w postaci

$$V(z) = V^+ \exp(\gamma z) + V^- \exp(-\gamma z), \quad (6.27)$$

$$I(z) = I^+ \exp(\gamma z) + I^- \exp(-\gamma z). \quad (6.28)$$

Impedancja obciążenia linii dana jest wzorem

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L}, \quad (6.29)$$

w którym V_L i I_L są całkowitym napięciem i całkowitym prądem obciążenia. Pojęcie „całkowity” oznacza tutaj sumę napięć oraz prądów docierających do obciążenia i odchodzących od niego. Ponieważ dla obciążenia $z = 0$, z wyrażeń (6.27) - (6.29) otrzymujemy

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V^+ + V^-}{I^+ + I^-} = Z_0 \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-}. \quad (6.30)$$

Zwróćmy uwagę, że jeżeli w linii istnieje wyłącznie fala propagująca w przód, wówczas $V^- = 0$ i

$$Z_L = Z_0. \quad (6.31)$$

Spełnienie warunku (6.31) oznacza dopasowanie linii i jej obciążenia. Ze wzoru (6.31) wynika więc, że dopasowanie linii i obciążenia oznacza równość ich impedancji. Dopasowanie oznacza również maksimum mocy przekazywanej przez linię do obciążenia oraz brak fali biegnącej od obciążenia do generatora. Jeżeli

$$Z_L \neq Z_0, \quad (6.32)$$

w linii występować będą fale biegnące w przeciwnych kierunkach. Ze wzoru (6.30) możemy wówczas obliczyć

$$V^- = V^+ \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}. \quad (6.33)$$

Jak już wspomniano, fala biegnąca od obciążenia do generatora jest skutkiem braku dopasowania na końcu linii. Zdefiniujmy teraz współczynnik odbicia od obciążenia,

$$\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}. \quad (6.34)$$

Jest to liczba zespolona, gdyż liczby w równaniu (6.34) są również zespolone. Współczynnik Γ_L można przedstawić w postaci wykładniczej

$$\Gamma_L = |\Gamma_L| \exp(i\theta_\Gamma), \quad (6.35)$$

gdzie θ_Γ jest jego kątem fazowym¹.

¹ Dla jednoznacznego określenia wartości θ_Γ będziemy dalej przyjmować, że $-\pi < \theta_\Gamma \leq \pi$.

Obliczmy teraz impedancję linii w dowolnym jej punkcie. Napięcie i prąd w dowolnym punkcie z linii dane są wyrażeniami (6.27) oraz

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} \exp(\gamma z) - \frac{V^-}{Z_0} \exp(-\gamma z) \quad (6.36)$$

(wzór (6.36) wynika z formuły (6.26)). Wykorzystując definicję współczynnika odbicia (6.34), z powyższych wzorów otrzymamy

$$V(z) = V^+ [\exp(\gamma z) + \Gamma_L \exp(-\gamma z)], \quad (6.37)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} [\exp(\gamma z) - \Gamma_L \exp(-\gamma z)]. \quad (6.38)$$

Impedancja linii w dowolnym punkcie z dana jest więc wyrażeniem

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{\exp(\gamma z) + \Gamma_L \exp(-\gamma z)}{\exp(\gamma z) - \Gamma_L \exp(-\gamma z)}, \quad (6.39)$$

natomiast współczynnik odbicia wyrażeniem

$$\Gamma(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \frac{V^+ \Gamma_L \exp(-\gamma z)}{V^+ \exp(\gamma z)} = \Gamma_L \exp(-2\gamma z) \quad (6.40)$$

(wynika ono ze wzorów (6.34), (6.37) i (6.38)). Wykorzystując z kolei zależności (6.15) oraz (6.35), wzór (6.40) możemy przepisać w postaci

$$\Gamma(z) = \Gamma_L \exp(-2\alpha z - i2\beta z) = |\Gamma_L| \exp(-2\alpha z) \exp(i\theta_\Gamma) \exp(-i2\beta z). \quad (6.41)$$

Z powyższej formuły wynika, że współczynnik odbicia ma na końcu linii ($z = 0$) amplitudę $|\Gamma_L|$. W przypadku linii stratnej ($\alpha > 0$), wartość $|\Gamma(z)|$ maleje wykładniczo w miarę zbliżania się do generatora. Jego faza

$$\phi_{\Gamma(z)} = \theta_\Gamma - 2\beta z \quad (6.42)$$

maleje liniowo ze współrzędną z .

Jeżeli linia jest bezstratna ($R = 0$ i $G = 0$), to zgodnie ze wzorem (6.15) zespolona stała propagacji γ staje się czysto urojona:

$$\alpha = 0, \quad \gamma = i\beta. \quad (6.43)$$

W tym wypadku otrzymane poprzednio wyrażenia znacznie się upraszczają. Impedancja falowa (6.25) linii jest rzeczywista a moduł współczynnika odbicia (6.41) jest jednakowy we wszystkich punktach linii, $|\Gamma(z)| = |\Gamma_L|$. Napiszmy obecnie wzory (6.37) i (6.38) dla linii bezstratnej:

$$V(z) = V^+ [\exp(i\beta z) + \Gamma_L \exp(-i\beta z)], \quad (6.44)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{Z_0} [\exp(i\beta z) - \Gamma_L \exp(-i\beta z)]. \quad (6.45)$$

Wykorzystując zależność (6.35), z równań (6.44) i (6.45) otrzymamy

$$\begin{aligned} V(z) &= V^+ \exp(i\beta z) [1 + \Gamma_L \exp(-i2\beta z)] \\ &= V^+ \exp(i\beta z) [1 + |\Gamma_L| \exp(i\theta_\Gamma) \exp(-i2\beta z)], \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{V^+}{Z_0} \exp(i\beta z) [1 - \Gamma_L \exp(-i2\beta z)] \\ &= \frac{V^+}{Z_0} \exp(i\beta z) [1 - |\Gamma_L| \exp(i\theta_\Gamma) \exp(-i2\beta z)]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Zbadamy teraz rozkłady amplitudy napięcia $|V(z)|$ i amplitudy natężenia prądu $|I(z)|^2$ w linii bezstratnej. Amplitudę napięcia obliczymy korzystając z zależności $|V(z)|^2 = V(z)V^*(z)$, w której gwiazdka oznacza wielkość zespoloną sprzężoną. Ze wzoru (6.46) otrzymujemy

$$\begin{aligned} |V(z)|^2 &= V^+ \exp(i\beta z) \{1 + |\Gamma_L| \exp[i(\theta_\Gamma - 2\beta z)]\} \\ &\quad \cdot V^{+*} \exp(-i\beta z) \{1 + |\Gamma_L| \exp[-i(\theta_\Gamma - 2\beta z)]\} \\ &= |V^+|^2 \left\{ 1 + |\Gamma_L|^2 + |\Gamma_L| \{ \exp[i(\theta_\Gamma - 2\beta z)] + \exp[-i(\theta_\Gamma - 2\beta z)] \} \right\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Korzystając ze wzoru Eulera dostajemy końcowe wyrażenie na amplitudę napięcia

$$|V(z)| = |V^+| \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 + 2|\Gamma_L| \cos(2\beta z - \theta_\Gamma)}. \quad (6.49)$$

W analogiczny sposób otrzymujemy rozkład amplitudy prądu w linii

$$|I(z)| = \frac{|V^+|}{Z_0} \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 - 2|\Gamma_L| \cos(2\beta z - \theta_\Gamma)}. \quad (6.50)$$

Ze wzoru (6.49) wynika, że amplituda napięcia zmienia się wzdłuż linii, osiągając na przemian lokalne maksima i minima. Amplituda napięcia przyjmuje największe wartości

$$V_{max} = |V^+| (1 + |\Gamma_L|), \quad (6.51)$$

w punktach, których współrzędna z spełnia warunek

$$2\beta z - \theta_\Gamma = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.52)$$

natomiast wartości najmniejsze

$$V_{min} = |V^+| (1 - |\Gamma_L|), \quad (6.53)$$

w punktach

$$2\beta z - \theta_\Gamma = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.54)$$

² W dalszych wzorach wielkości te możemy alternatywnie uważać za napięcie i natężenie skuteczne, które są proporcjonalne do amplitud napięcia i natężenia.

Położenie pierwszego minimum amplitudy napięcia można, uwzględniając wzór (6.22), wyrazić wzorami

$$z_{min} = \frac{1}{2\beta} (\theta_\Gamma + \pi) = \frac{\lambda}{4\pi} (\theta_\Gamma + \pi). \quad (6.55)$$

Podobnie zmienia się amplituda (6.50) prądu wzdłuż linii, oscylując między wartościami:

$$I_{max} = \frac{|V^+|}{Z_0} (1 + |\Gamma_L|), \quad (6.56)$$

$$I_{min} = \frac{|V^+|}{Z_0} (1 - |\Gamma_L|). \quad (6.57)$$

Maksima prądu występują w tych przekrojach linii, w których napięcie przyjmuje wartość najmniejszą (wzór (6.54)), natomiast minima prądu — tam, gdzie napięcie jest największe (wzór (6.52)).

Możemy teraz zdefiniować współczynnik fali stojącej SWR (Standing Wave Ratio):

$$SWR = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}. \quad (6.58)$$

Znając SWR, np. w wyniku przeprowadzonych pomiarów, można wyznaczyć wartość $|\Gamma_L|$:

$$|\Gamma_L| = \frac{SWR - 1}{SWR + 1}. \quad (6.59)$$

Podstawiając (6.59) do (6.51) i (6.53) otrzymamy

$$V_{max} = |V^+| \left(1 + \frac{SWR - 1}{SWR + 1} \right) = |V^+| \frac{2 \cdot SWR}{SWR + 1} \quad (6.60)$$

oraz

$$V_{min} = |V^+| \left(1 - \frac{SWR - 1}{SWR + 1} \right) = |V^+| \frac{2}{SWR + 1}. \quad (6.61)$$

Analizując wyrażenia (6.59) — (6.61) można wysnuć następujące wnioski:

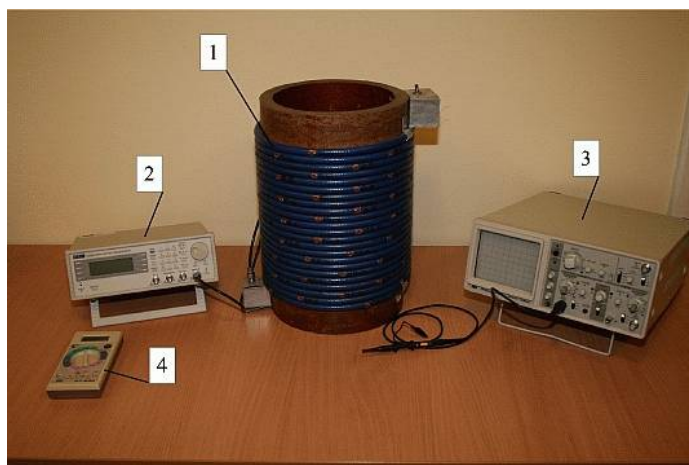
1. Im większy SWR tym większe jest maksimum napięcia i tym mniejsze minimum napięcia w linii.
2. Jeżeli $SWR = 1$, $|\Gamma_L| = 0$. W tym przypadku $V_{max} = V_{min} = |V^+|$ i napięcie mierzone wzdłuż linii pozostaje stałe. Odpowiada to wzajemnemu dopasowaniu linii i obciążenia, $Z_L = Z_0$ ³.
3. Jeżeli $SWR = \infty$, $|\Gamma_L| = 1$. W tym przypadku $V_{max} = 2|V^+|$ i $V_{min} = 0$. Mówimy wówczas o fali całkowicie stojącej w linii. Stan ten jest osiąganym, gdy linia na końcu jest zwarta ($Z_L = 0$, $\Gamma_L = -1$) lub otwarta ($Z_L = \infty$, $\Gamma_L = 1$). Ze wzoru (6.49) wynika, że w linii zwartej na końcu

$$|V(z)| = 2|V^+| |\sin(\beta z)|, \quad (6.62)$$

natomiast w linii rozwartej

$$|V(z)| = 2|V^+| |\cos(\beta z)|. \quad (6.63)$$

³ Impedancja Z_g określająca stan dopasowania na wejściu linii ma wpływ jedynie na amplitudę fali stojącej.



Rysunek 6.3. Aparatura do badania stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym linii transmisyjnej. 1 — odcinek linii długiej (kabla koncentrycznego), 2 — generator sygnału w.cz., 3 — oscyloskop, 4 — miernik uniwersalny (omomierz)

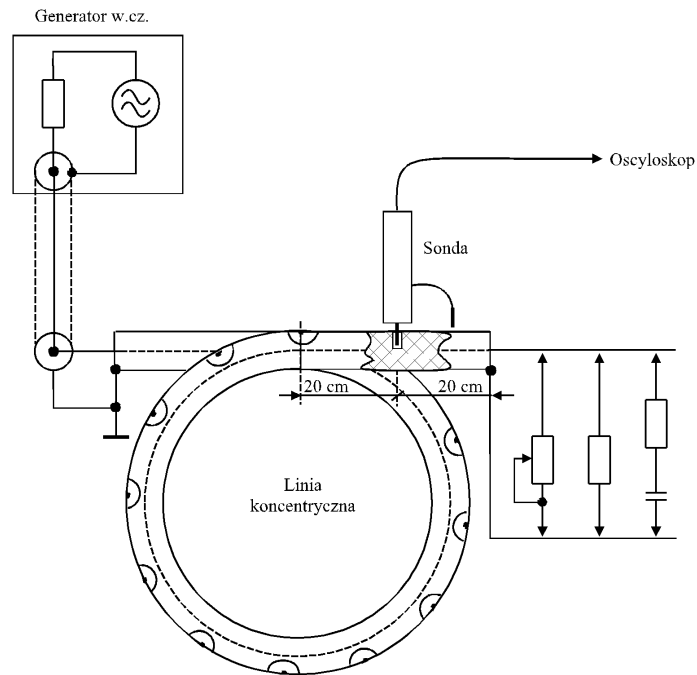
6.3. Aparatura pomiarowa

Widok aparatury używanej w ćwiczeniu zawiera rys. 6.3. Składa się ona z 20-metrowego odcinka linii transmisyjnej w postaci kabla koncentrycznego z otworkami umożliwiającymi pomiar napięć. Otworki rozmieszczone są w odstępach 20 centymetrowych. Linia na końcu zaopatrzona jest w blaszane pudełko, zawierające elementy tworzące jej obciążenie: potencjometr, kondensator i odcinek przewodu⁴. Linia zasilana jest z generatora sygnału w.cz. z cyfrową syntezą częstotliwości. Do pomiaru napięcia wzdłuż linii służy oscyloskop z sondą. Schemat układu przedstawia rys. 6.4.

6.4. Zadania

1. Wyznaczyć rozkład napięcia w linii zwartej na końcu ($Z_L = 0$).
2. Wyznaczyć rozkład napięcia w linii rozwartej na końcu ($Z_L = \infty$).
3. Wyznaczyć impedancję falową linii Z_0 .
4. Wyznaczyć rozkład napięcia w linii obciążonej rezystorem o wartości $Z_L = Z_0$.
5. Wyznaczyć rozkład napięcia w linii w przypadku Z_L w postaci szeregowo połączonych: rezystora o wartości $R_L = Z_0$ i kondensatora o pojemności $C_L = 160$ pF.
6. Wyznaczyć rozkład napięcia w linii obciążonej rezystorem $R_L = 180 \Omega$.

⁴ Ze względu na wysoką częstotliwość sygnału w linii wszelkie połączenia w pudełku wykonywane są za pomocą lutowania.



Rysunek 6.4. Schemat aparatury do badania stanu ustalonego w linii transmisyjnej przy różnych rodzajach obciążenia

6.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Przed przystąpieniem do pomiarów należy sprawdzić i skorygować ustawienia generatora: powinien on wytwarzać sygnał sinusoidalny o częstotliwości 9 MHz i amplitudzie 1 V. Przy danej częstotliwości długość fali napięcia (i prądu) w linii wynosi 20 m, tj. jest równa długości kabla.

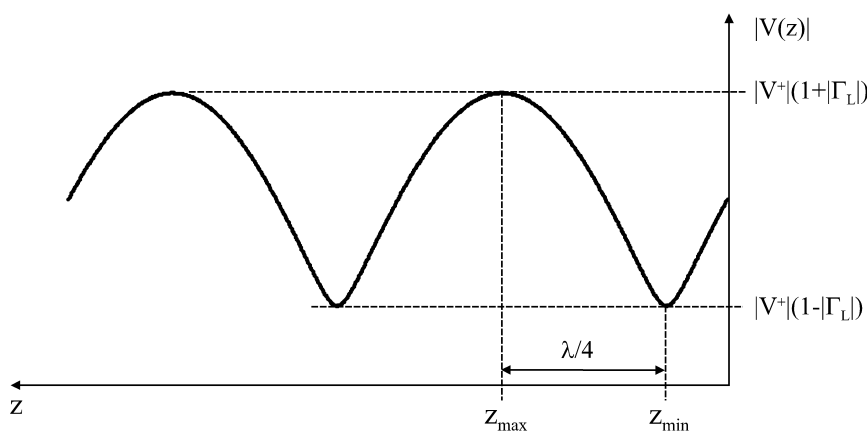
W celu ułatwienia wykonywania ćwiczenia dalej przedstawiono rysunek przedstawiający przykładowy rozkład napięcia w linii oraz podstawowe, niezbędne do opracowania wyników pomiarów, wzory.

$$\text{SWR} = \frac{V_{max}}{V_{min}}, \quad (6.64)$$

$$|\Gamma_L| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1}, \quad (6.65)$$

$$\theta_\Gamma = \pi \left(\frac{4z_{min}}{\lambda} - 1 \right), \quad (6.66)$$

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}. \quad (6.67)$$



Rysunek 6.5. Przykładowy rozkład napięcia wzdłuż linii długiej

przy czym

$$Z_L = R_L + \frac{i}{\omega C_L}. \quad (6.68)$$

Dla wygody warto również przedstawić wartości współczynnika odbicia od obciążenia Γ_L dla kilku charakterystycznych rodzajów obciążenia linii:

1. Linia zwarta na końcu, $Z_L = 0$, $\Gamma_L = -1$.
2. Linia rozwarta na końcu, $Z_L = \infty$, $\Gamma_L = 1$.
3. Linia dopasowana, $Z_L = Z_0$, $\Gamma_L = 0$.
4. Linia obciążona rezystancyjnie, $Z_L = R_L + i0$, $-1 < \Gamma_L < 1$.

ad.1. Przy pomocy lutownicy należy zewrzeć koniec linii. Dokonujemy tego przy pomocy odcinka przewodu znajdującego się w pudełku. Następnie za pomocą oscyloskopu wyznaczamy rozkład napięcia wzdłuż kabla, poczynając od jego końca, tj. pudełka zawierającego elementy obciążające linię. Prawidłowy pomiar napięć polega na wetknięciu końcówki sondy w głąb otworka tak, aby dotknęła ona wewnętrznej żyły kabla. Przełącznik umieszczony na korpusie sondy musi być w pozycji „ $\times 10$ ”. Sonda tłumi wówczas sygnał dziesięciokrotnie, co należy uwzględnić przy opracowywaniu wyników pomiarów. Przewód sondy zakończony zaciskiem krokodylkowym musi być połączony z pudełkiem. Zauważmy, że nie ma potrzeby wykonywania pomiarów wzdłuż całej długości linii. Konieczne jest tylko uzyskanie więcej niż połowy długości fali (por. rys. 6.5).

Uzyskane w opisany sposób wyniki przedstawiamy na wykresie analogicznym do rys. 6.5. Następnie korzystając ze wzorów (6.64) — (6.67) wyznaczamy wartości opisanych nimi wielkości. Punkty pomiarowe aproksymujemy funkcją (6.62).

ad.2. Używając lutownicy rozewrzeć koniec linii. Przeprowadzić pomiary rozkładu napięcia wzdłuż linii i opracowanie wyników w sposób analogiczny do opisanego w punkcie 1. Punkty pomiarowe aproksymować funkcją (6.63).

ad.3. W celu doświadczalnego wyznaczenia impedancji falowej Z_0 kabla, należy podłączyć do jego końca potencjometr. Impedancja Z_0 jest taką opornością potencjometru R_L , przy której napięcie na początku linii

$$V_L = V(\lambda/4). \quad (6.69)$$

Ustalenia wartości R_L należy dokonywać metodą kolejnych przybliżeń, obracając nieznacznie potencjometr, a następnie mierząc napięcie w wyznaczonych punktach kabla. Czynności te należy powtarzać tak długo, aż równość napięć zostanie osiągnięta. Wówczas odłączamy kabel zasilający linię i przy pomocy multimetru mierzymy opór potencjometru. Opisany pomiar należy powtórzyć co najmniej 5 krotnie. Ostateczny wynik będzie wartością średnią wyznaczonych rezystancji.

ad.4. Nie zmieniając ustawienia potencjometru ($R_L = Z_0$) należy w sposób opisany w punkcie 1 wykonać serię pomiarów. Pomiary przeprowadzamy tak długo, aż możliwe będzie stwierdzenie charakteru występującej zależności. Wyniki należy przedstawić w postaci wykresu.

ad.5. Przed przystąpieniem do pomiarów należy we wnętrzu pudełka dokonać przełączeń tak, aby linia obciążona była potencjometrem o impedancji $R_L = Z_0$ oraz szeregowo połączonym kondensatorem o pojemności C_L . Pomiary i opracowanie wyników przebiegają w sposób podobny jak w punktach 1 i 2. Punkty pomiarowe należy aproksymować funkcją (6.49).

ad.6. Po uzyskaniu obciążenia linii w postaci czysto rezystancyjnej $Z_L = R_L = 180 \Omega$, należy wykonać pomiary w sposób opisany poprzednio. Uwaga: pomiary oporności potencjometru przeprowadzać przy odłączonym kablu zasilającym linię. Opracowanie wyników — jak poprzednio.

W dyskusji wyników należy zwrócić uwagę na ich zgodność (lub brak) z przewidywaniami teoretycznymi.

6.6. Wymagane wiadomości

1. Wielkości charakteryzujące falę.
2. Wielkości charakteryzujące linię transmisyjną.

6.7. Literatura

- [1] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, warszawa 1991.
- [2] F.S. Crawford — Fale, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.
- [3] J. Osowski — Teoria obwodów, t. II, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1971.

Ćwiczenie 7

Badanie propagacji impulsów w linii transmisyjnej

7.1. Zasada ćwiczenia

Odcinek linii transmisyjnej w postaci kabla koncentrycznego o znanej długości zasilany jest ciągiem wąskich impulsów prostokątnych, wytwarzanych przez generator. Układ pomiarowy umożliwia niezależną zmianę impedancji na wejściu i wyjściu linii. Przy pomocy oscyloskopu bada się impulsy na jej początku i końcu przy różnych wartościach obu impedancji.

7.2. Wiadomości teoretyczne

Z transmisją impulsów mamy do czynienia w technice cyfrowej i telekomunikacji. Impulsy możemy uznać za wąskie, jeżeli czas ich trwania Δt jest bardzo krótki w porównaniu z czasem ich propagacji w linii t_p :

$$\Delta t \ll t_p, \quad (7.1)$$

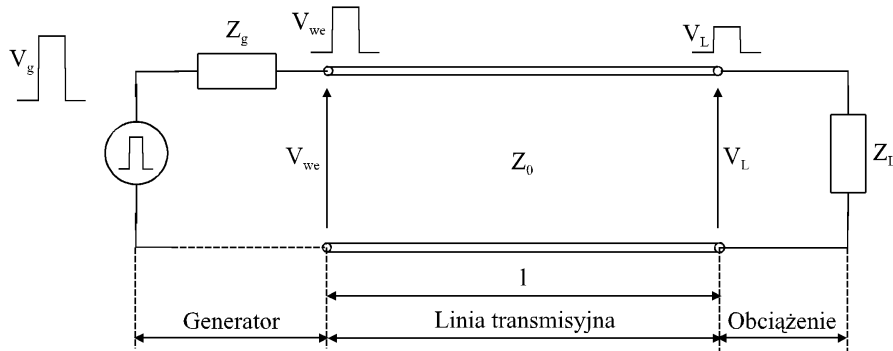
gdzie

$$t_p = \frac{l}{v_p} \quad (7.2)$$

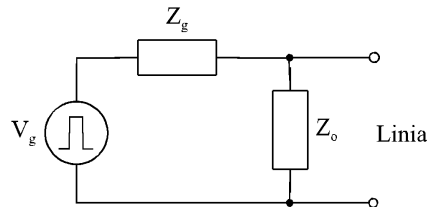
(l jest długością linii, v_p — prędkością propagacji sygnału w linii). Zauważmy jednak, że powyższe zależności nie oznaczają małej szerokości bezwzględnej impulsu. Załóżmy obecnie, że linia transmisyjna jest bezstratna i nie wnosi zniekształceń impulsów, co oznacza, że prędkość v_p nie zależy od częstotliwości przenoszonego sygnału. Rozpatrzmy układ przedstawiony na rys. 7.1. Generator impulsów prostokątnych połączony jest z wejściem linii transmisyjnej. Opór potencjometru wraz z oporem wewnętrznym generatora tworzą impedancję Z_g o regulowanej wartości. Linia o długości l i o impedancji falowej (charakterystycznej) Z_0 zakończona jest potencjometrem, stanowiącym regulowaną impedancję obciążenia Z_L .

Założmy, że obciążenie jest dopasowane do linii, tzn., że

$$Z_L = Z_0. \quad (7.3)$$



Rysunek 7.1. Propagacja wąskich impulsów przez linię transmisyjną



Rysunek 7.2. Dzielnik impedancji na wejściu linii

Niech generator wygeneruje impuls w czasie $t = 0$. Impuls pojawiający się w linii i biegnący w stronę obciążenia będzie miał amplitudę napięcia¹

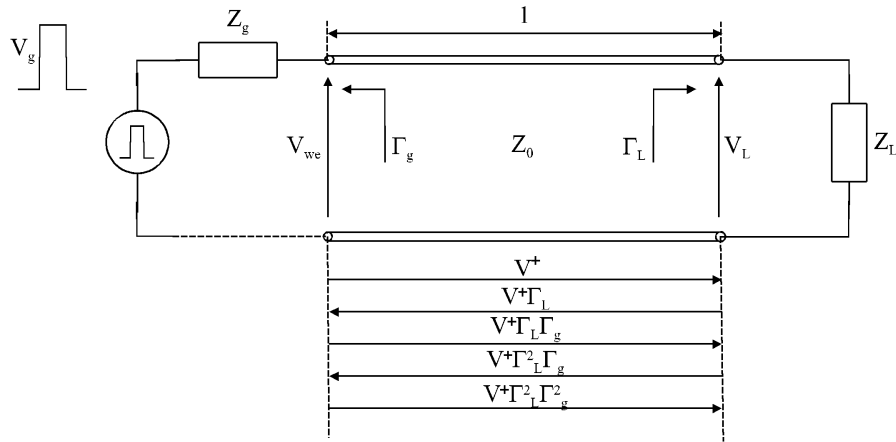
$$V^+ = V_g \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g}. \quad (7.4)$$

Ogólnie $V^+ < V_g$ gdyż w układzie mamy do czynienia z dzielnikiem impedancji, utworzonym przez impedancję generatora i impedancję linii (rys. 7.2). Prawa strona równania (7.4) odzwierciedla fakt, że impuls w czasie $t = 0$ nie przemieścił się jeszcze wzdłuż linii i „widzi” jedynie jej impedancję falową Z_0 . Po czasie $t = t_p$ impuls osiągnie obciążenie. Ponieważ linia jest dopasowana, nie występuje odbicie impulsu i współczynnik (6.34) odbicia $\Gamma_L = 0^2$. Oznacza to, że cała energia transportowana przez impuls podawana jest do obciążenia.

Założmy obecnie, że linia nie jest dopasowana na obu końcach (rys. 7.3). Niech w chwili $t = 0$ na zaciskach generatora pojawi się impuls. Ponieważ generator „widzi” linię o impedancji charakterystycznej Z_0 , amplituda impulsu na jej początku będzie dana wzorem (7.4). Impuls propaguje z prędkością v_p do końca linii, gdzie zostaje

¹ Górnym indeksem „+” oznaczamy impuls biegnący w stronę obciążenia. Impuls biegnący w stronę generatora oznaczamy indeksem „-”.

² Bardziej szczegółową teorię linii transmisyjnej zawiera instrukcja do ćwiczenia 6 „Badanie stanu ustalonego przy pobudzeniu sinusoidalnym linii transmisyjnej”. W obecnej instrukcji korzystamy z niektórych uzyskanych tam wyników.



Rysunek 7.3. Propagacja impulsów w linii transmisyjnej obustronnie niedopasowanej

zostaje częściowo przeniesiony do obciążenia. Ponieważ na końcu linii nie występuje dopasowanie,

$$Z_L \neq Z_0, \quad (7.5)$$

nastąpi odbicie impulsu, określone współczynnikiem (6.34) odbicia od obciążenia,

$$\Gamma_L = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (7.6)$$

(należy zauważyć, że współczynnik Γ_L może przyjmować wartości ujemne). Odbity impuls będzie miał amplitudę

$$V_1^- = \Gamma_L V^+ = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V^+, \quad (7.7)$$

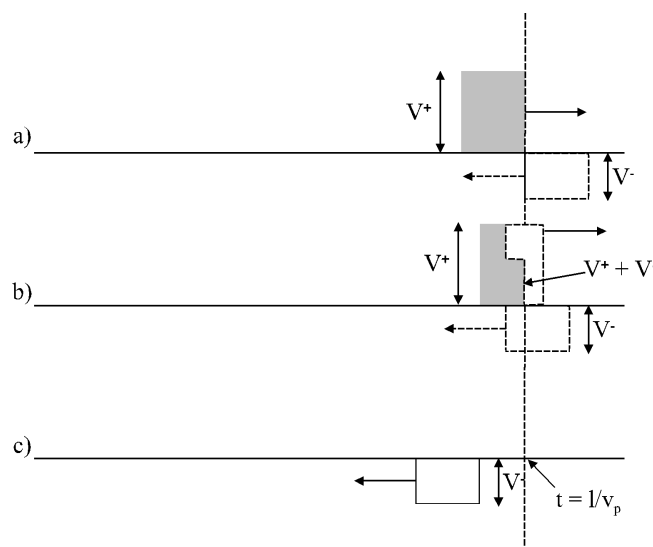
gdzie V^+ dane jest wzorem (7.4). W rezultacie³

$$V_1^- = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \left(\frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \right) V_g. \quad (7.8)$$

W powyższych wzorach indeks „1” oznacza wystąpienie pierwszego odbicia od obciążenia. Całkowite napięcie na obciążeniu w chwili dotarcia do niego impulsu, tj. w chwili określonej formułą (7.2) dane jest wzorem

$$V_{L1} = V^+ + V_1^- = V^+ (1 + \Gamma_L). \quad (7.9)$$

Zwróćmy uwagę, że na końcu linii w czasie równym szerokości impulsu występuje suma fali docierającej i odbitej od obciążenia. Po tym czasie w linii porusza się tylko impuls odbity, o amplitudzie określonej równaniem (7.8). Sytuację tę w przypadku ujemnej



Rysunek 7.4. Impulsy na końcu linii o niedopasowanym obciążeniu — przy założeniu ujemnej wartości Γ_L — przed (a), w trakcie (b) i po odbiciu (c)

wartości współczynnika Γ_L ilustruje rys. 7.4. Część (a) rysunku przedstawia w chwili $t = t_p$ impulsy docierający z generatora i odbity od obciążenia. Impulsy te w czasie Δt , równym ich szerokości, nakładają się na siebie (rys. 7.4b). Gdy $t > t_p + \Delta t$, tj. po odbiciu od obciążenia, które działa w tym przypadku jak źródło nowej fali, impuls porusza się z powrotem w kierunku generatora (rys. 7.4c), osiągając go po czasie t_p . Impuls ten „widzi” wówczas impedancję generatora Z_g . Z uwagi na niedopasowanie,

$$Z_g \neq Z_0, \quad (7.10)$$

część fali zostanie odbita z powrotem w kierunku obciążenia, część zaś przedostanie się do generatora. Oznacza to, że odbita od obciążenia fala docierająca do generatora staje się nową falą, propagującą w stronę obciążenia. W analogii ze wzorem (7.6), odbicie od generatora określone jest współczynnikiem

$$\Gamma_g = \frac{V_1^+}{V_1^-} = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}. \quad (7.11)$$

Amplituda fali odbitej od generatora dana jest formułą

$$V_1^+ = \Gamma_g V_1^- = \Gamma_L \Gamma_g V^+, \quad (7.12)$$

natomiast całkowite napięcie na wejściu linii określa wyrażenie

$$V_{we1} = V_1^- + V_1^+ = V^+ \Gamma_L (1 + \Gamma_g). \quad (7.13)$$

³ Oprócz fal napięcia, w linii propagują także fale prądu, związane z falami napięcia zależnością $I^\pm = V^\pm / Z_0$.

Podobnie jak w poprzednim przypadku, wzór ten będzie słuszny przez czas Δt . Po jego upływie będziemy mieli do czynienia z pojedynczym impulsem, propagującym w stronę obciążenia. Opisany proces powtarza się nieskończenie długo; każde odbicie od jednego z końców linii oznacza powstanie nowej fali, przemieszczającej się w kierunku końca przeciwnego.

Wyprowadzimy teraz wzory, określające prędkość propagacji impulsu i impedancję falową bezstratnej linii transmisyjnej. Można wykazać, że jednostkowa indukcyjność L i jednostkowa pojemność C linii, wypełnionej materiałem o względnej przenikalności elektrycznej ε_r i względnej przenikalności magnetycznej μ_r , są powiązane zależnością:

$$LC = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0. \quad (7.14)$$

W podanym wzorze ε_0 i μ_0 oznaczają odpowiednio przenikalność dielektryczną i magnetyczną próżni.

W przypadku bezstratnej linii (o jednostkowej rezystancji $R = 0$ i jednostkowej konduktancji $G = 0$) prędkość impulsu jest równa prędkości fazowej fali, danej wzorem (6.23):

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.15)$$

(ω — pulsacja fali), przy czym, zgodnie ze wzorem (6.15) stała fazowa

$$\beta = \omega \sqrt{LC}. \quad (7.16)$$

Z ostatnich dwóch wzorów otrzymujemy:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7.17)$$

oraz, po uwzględnieniu związku (7.14),

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}. \quad (7.18)$$

Podany wzór można zapisać w prostszej postaci biorąc pod uwagę, że prędkość fali elektromagnetycznej w próżni

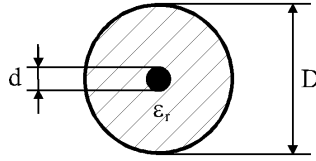
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (7.19)$$

oraz, że dla materiałów niemagnetycznych wartość $\mu_r \approx 1$. Dostajemy wtedy:

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}. \quad (7.20)$$

Znając prędkość rozchodzenia się impulsu można więc wyznaczyć stałą dielektryczną izolatora,

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{v_p^2}. \quad (7.21)$$



Rysunek 7.5. Przekrój kabla koncentrycznego

Ze wzoru (6.25) wynika, że impedancja falowa bezstratnej linii transmisyjnej jest określona wyrażeniem

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (7.22)$$

które można, uwzględniając związek (7.14), przepisać jako:

$$Z_0 = \frac{1}{C} \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}. \quad (7.23)$$

Przyjmijmy teraz, że linia transmisyjna ma postać kabla koncentrycznego, składającego się z centralnego przewodu o średnicy d , otoczonego przewodzącym opłotem (ekranem) o średnicy D (rys. 7.5). Jednostkowa pojemność takiego kabla dana jest wzorem

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln(D/d)}. \quad (7.24)$$

Jego impedancja falowa jest więc równa

$$Z_0 = \frac{\ln(D/d)}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}. \quad (7.25)$$

Wartość współczynnika $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ możemy obliczyć, korzystając ze wzoru (7.19) oraz z wartości

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}, \quad (7.26)$$

co daje:

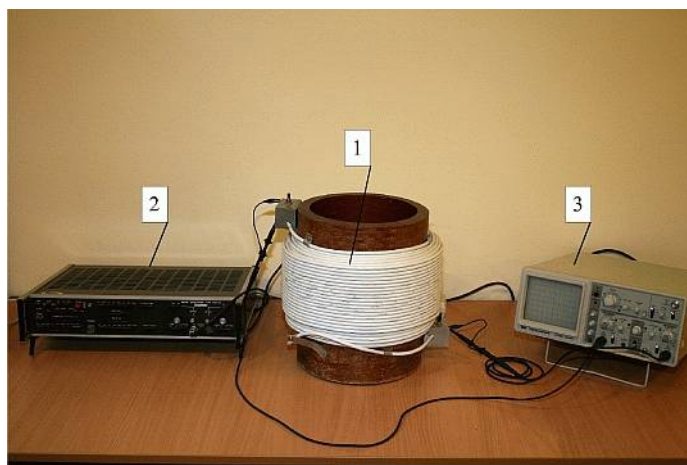
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = c\mu_0 = 120\pi [\Omega]. \quad (7.27)$$

Przyjmując, że $\mu_r \approx 1$, impedancję falową (7.25) kabla możemy więc wyrazić wzorem:

$$Z_0 = \frac{60 \ln(D/d)}{\sqrt{\varepsilon_r}} [\Omega]. \quad (7.28)$$

7.3. Aparatura pomiarowa

Stosowana w ćwiczeniu aparaturę pomiarową przedstawia rys. 7.6. Odcinek kabla o długości $l = 100$ m i poprzecznych rozmiarach $D = 4,8$ mm i $d = 1$ mm, nawinięty na



Rysunek 7.6. Aparatura pomiarowa do badania propagacji impulsów w koncentrycznej linii transmisyjnej

bęben, zasilany jest z generatora impulsów prostokątnych. Na początku i końcu kabla znajdują się potencjometry stanowiące regulowane impedancje. Sygnał z początku i końca kabla, za pomocą sond pomiarowych, podawany jest na wejścia dwukanałowego oscyloskopu. Schemat układu pomiarowego przedstawia rys. 7.7.

7.4. Zadania

1. Wyznaczyć impedancję charakterystyczną Z_0 kabla oraz amplitudę V_g sygnału z generatora.
2. Wyznaczyć czas propagacji impulsów w linii. Obliczyć prędkość ich propagacji v_p . Obliczyć stałą dielektryczną ϵ_r izolacji kabla i jego impedancję charakterystyczną.
3. Zbadać rozkład impulsów w linii przy różnych stanach jej dopasowania z generatorem i obciążeniem.

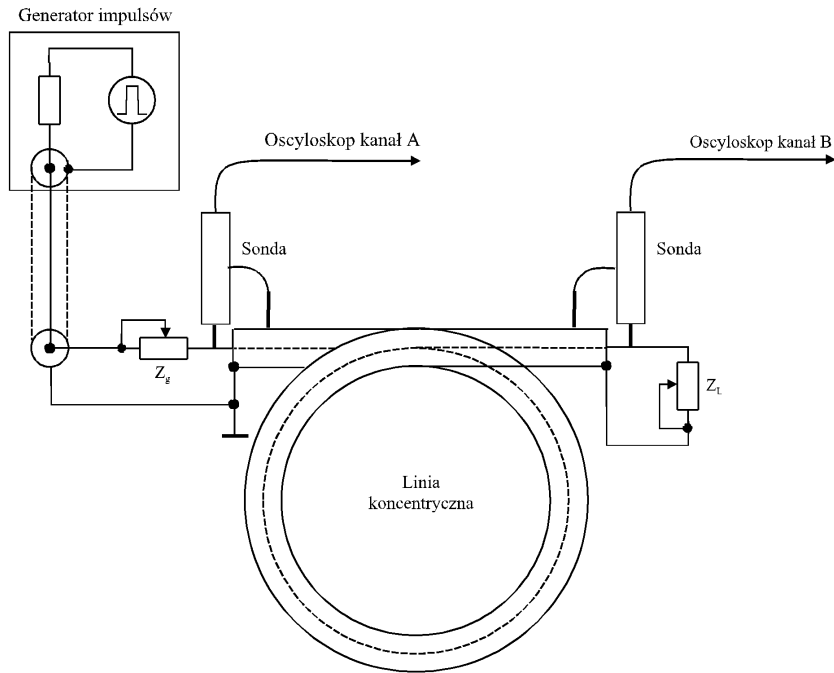
7.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

ad.1. Pomiaru impedancji charakterystycznej kabla dokonujemy przy linii obustronnie dopasowanej, tj. gdy

$$Z_g = Z_L = Z_0. \quad (7.29)$$

W celu uzyskania obustronnego dopasowania linii należy:

- obracając potencjometrem uzyskać na końcu linii stan niedopasowania,
- obracając potencjometrem od strony generatora zlikwidować impuls odbity od niedopasowanego końca linii,



Rysunek 7.7. Schemat układu do badania propagacji impulsów w koncentrycznej linii transmisyjnej. 1 — odcinek linii transmisyjnej, 2 — generator impulsów prostokątnych, 3 — oscyloskop

- obracając potencjometrem na końcu linii zlikwidować impuls odbity od obciążenia. Obraz obserwowany na ekranie oscyloskopu należy nanieść na papier milimetry. Na podstawie wyników pomiarów oszacować amplitudę impulsów wytwarzanych przez generator.

Następnie odłączamy generator od linii i przy pomocy omomierza mierzymy opory Z_g i Z_L potencjometrów. Uwaga: do wartości Z_g należy dodać oporność 50Ω wnoszoną przez generator. Jeżeli pomiar przeprowadzony był prawidłowo, opory obu potencjometrów powinny być w przybliżeniu równe impedancji falowej Z_0 linii (wzór (7.29)). Opisaną procedurę należy powtórzyć co najmniej trzykrotnie, a następnie obliczyć wartość średnią \bar{Z}_0 wszystkich zmierzonych oporów. Jej niepewność obliczamy ze wzoru

$$\Delta Z_0 = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (\Delta Z_{0k})^2}{n(n-1)}}, \quad (7.30)$$

gdzie ΔZ_{0k} wyznaczona jest na podstawie średniej arytmetycznej \bar{Z}_0 serii n pomiarów:

$$\Delta Z_{0k} = \bar{Z}_0 - Z_{0k}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (7.31)$$

ad.2. Aby wyznaczyć czas propagacji t_p sygnału w linii, posługujemy się wartością podstawy czasu oscyloskopu używaną dotychczas. Wykonujemy co najmniej pięć niezależnych pomiarów, a otrzymane wyniki uśredniamy. Niepewność wyznaczonej wielkości określamy na podstawie wzorów analogicznych do (7.30) i (7.31). Ze wzoru (7.2) obliczamy prędkość propagacji impulsu. Celem określenia niepewności prędkości korzystamy ze wzoru

$$\Delta v_p = \left| \frac{\Delta l}{t_p} \right| + \left| -\frac{l}{t_p^2} \Delta t_p \right|, \quad (7.32)$$

w którym niepewność długości linii, $\Delta l = 0,2$ m.

Następnie ze wzorów (7.21) i (7.28) obliczamy stałą dielektryczną izolatora kabla i jego impedancję falową. Niepewność obliczania stałej dielektrycznej określamy ze wzoru

$$\Delta \varepsilon_r = \left| -\frac{2c^2}{v_p^3} \Delta v_p \right|, \quad (7.33)$$

natomiast niepewność impedancji kabla z wyrażenia

$$\Delta Z_0 = 60 \left\{ \left| \frac{d}{D\sqrt{\varepsilon_r}} \Delta D \right| + \left| -\frac{\Delta d}{d\sqrt{\varepsilon_r}} \right| + \left| -\frac{\ln(D/d)}{2\varepsilon_r^{3/2}} \Delta \varepsilon_r \right| \right\}, \quad (7.34)$$

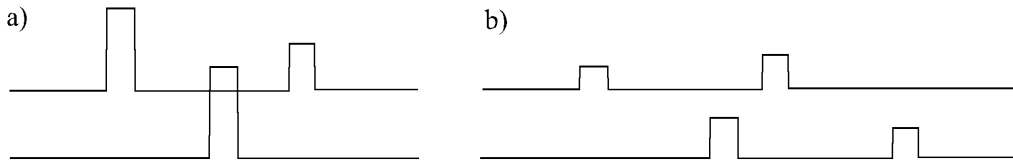
w którym $\Delta D = \Delta d = 0,01$ mm.

ad.3. Badania rozkładu impulsów w linii dokonujemy w dwóch stanach jej dopasowania:

- gdy $Z_g = Z_0$, $Z_L > Z_0$,
- gdy Z_L , $Z_g > Z_0$

(rys. 7.8 przedstawia szkice impulsów). W obu przypadkach należy przenieść obraz z oscyloskopu na papier milimetrowy. Następnie należy odłączyć kabel doprowadzający sygnał z generatora i przy pomocy omomierza zmierzyć rezystancję potencjometrów. Uwaga: do wartości Z_g dodajemy oporność 50Ω wnoszoną przez generator.

Przeprowadzając dyskusję wyników zwracamy uwagę na ich zgodność (lub brak) z przewidywaniami teoretycznymi. Należy również zwrócić uwagę na kształt obserwowanych impulsów. Wyniki obserwacji skomentować.



Rysunek 7.8. Szkice obrazów oscyloskopowych impulsów w linii transmisyjnej: gdy $Z_g = Z_0$ oraz $Z_L > Z_0$ (a), Z_L , $Z_g > Z_0$ (b)

7.6. Wymagane wiadomości

1. Fala i charakteryzujące ją wielkości.
2. Linia transmisyjna i parametry ją charakteryzujące.
3. Pojęcie impedancji.
4. Dopasowanie impedancji.

7.7. Literatura

- [1] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, warszawa 1991.
- [2] F.S. Crawford — Fale, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.
- [3] J. Osowski — Teoria obwodów, t. II, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1971.

Ćwiczenie 8

Badanie pojedynczych i sprzężonych obwodów rezonansowych

8.1. Zasada ćwiczenia

1. Równoległy obwód rezonansowy LC zasilany jest z generatora przebiegu sinusoidalnego o częstotliwości radiowej (rzędu setek kHz). Korzystając z parametrów krzywej rezonansowej wyznacza się całkowitą pojemność w obwodzie, konduktancję równoległą obwodu oraz jego dobrotę.
2. Obwód rezonansowy jak w punkcie 1 sprzężony jest indukcyjnie z identycznym obwodem, połączonym z oscyloskopem. Obwody tworzą układ filtru pasmowego. Metodą wobuloskopową wyznacza się wartość współczynnika sprzężenia obwodów oraz szerokość pasma przenoszenia filtru w funkcji wzajemnej odległości cewek.

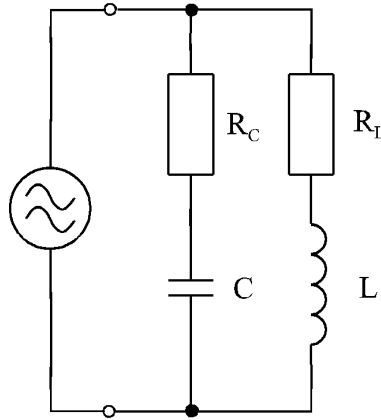
8.2. Wiadomości teoretyczne

1. Rozpatrzmy równoległy obwód drgający LC . W praktyce obwód taki konstruowany jest przy użyciu elementów stratnych, tj. rzeczywistej cewki i rzeczywistego kondensatora. Jednym z możliwych modeli takiego obwodu jest układ przedstawiony na rys. 8.1, w którym R_L jest rezystancją uzwojenia cewki, R_C — rezystancją reprezentującą straty rzeczywistego kondensatora. Wyprowadzimy teraz wyrażenie na częstotliwość rezonansową obwodu. Jego zespolona admitancja dana jest wyrażeniem

$$Y(\omega) = G(\omega) + iB(\omega), \quad (8.1)$$

w którym $G(\omega)$ jest konduktancją obwodu, $B(\omega)$ jego susceptancją, ω — pulsacją zasilającego obwód prądu. Na podstawie schematu z rys. 8.1 możemy zapisać, że

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{R_L + i\omega L} + \frac{1}{R_C + (i\omega C)^{-1}}, \\ &= \frac{R_L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{R_C}{R_L^2 + (\omega C)^{-2}} \\ &+ i \left[-\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} + \frac{(\omega C)^{-1}}{R_C^2 + (\omega C)^{-2}} \right]. \end{aligned} \quad (8.2)$$



Rysunek 8.1. Schemat zastępczy równoległego obwodu LC z elementami stratnymi

Z porównania wyrażeń (8.1) i (8.2) wynika, że część urojona wzoru (8.2) jest susceptancją $B(\omega)$ rozpatrywanego obwodu. Warunkiem wystąpienia rezonansu jest

$$B(\omega) = 0. \quad (8.3)$$

Rozwiązanie równania (8.3) ma postać

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_L^2}{L/C - R_C^2}}. \quad (8.4)$$

Czynnik $1/\sqrt{\frac{L}{C}}$ w równaniu (8.4) jest częstotliwością rezonansową obwodu złożonego z bezstratnych elementów:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8.5)$$

Przy danej pulsacji ω dobroć stratnego kondensatora i stratnej cewki zdefiniowana jest wzorami

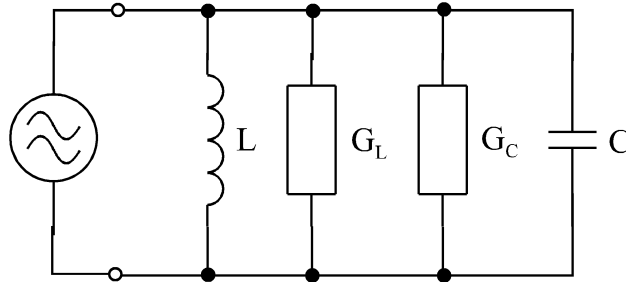
$$Q_C(\omega) = \frac{1}{\omega C R_C}, \quad Q_L(\omega) = \frac{\omega L}{R_L} \quad (8.6)$$

lub też, gdy $\omega = \omega_0$,

$$Q_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C R_C}, \quad Q_{L0} = \frac{\omega_0 L}{R_L}. \quad (8.7)$$

Korzystając z (8.5) oraz (8.7), wyrażenie (8.4) możemy przepisać w postaci

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - Q_{L0}^{-2}}{1 - Q_{C0}^{-2}}}. \quad (8.8)$$



Rysunek 8.2. Schemat zastępczy równoległego obwodu LC z konduktancjami reprezentującymi rzeczywiste elementy stratne

Z powyższej równości wynika, że pulsacja rezonansowa obwodu z rys. 8.1 jest różna od pulsacji rezonansowej obwodu LC złożonego z elementów idealnych.

Obwody omawianego typu pracują z reguły przy takich częstotliwościach, dla których

$$Q_L(\omega) \gg 1, Q_C(\omega) \gg 1. \quad (8.9)$$

Wykorzystując powyższe nierówności, ze wzoru (8.7) otrzymamy

$$\omega_r \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8.10)$$

Zauważmy obecnie — por. wyrażenia (8.6) i (8.9) — że przy częstotliwościach aplikacyjnych obwodu, tj. w wąskim otoczeniu pulsacji rezonansowej, zachodzą nierówności:

$$(\omega L)^2 \gg R_L^2, (\omega C)^2 \gg R_C^2. \quad (8.11)$$

Wzór (8.2) określający admitancje obwodu możemy teraz przedstawić w przybliżonej postaci

$$Y(\omega) \approx \frac{R_L}{(\omega L)^2} + \frac{R_C}{(\omega C)^{-2}} + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (8.12)$$

lub też

$$Y(\omega) \approx G_L + G_C + i \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right), \quad (8.13)$$

w której G_L i G_C są konduktancjami reprezentującymi rzeczywiste (stratne) elementy L i C (por. rys. 8.2). W stanie rezonansu, gdy

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \quad (8.14)$$

wzór (8.13) redukuje się do postaci

$$Y(\omega_0) \approx G_L + G_C = G_k, \quad (8.15)$$

z której wynika, że admitancja ma charakter czysto konduktancyjny.

Przywołajmy obecnie definicję impedancji falowej (charakterystycznej) ρ_k , która jest reaktancją indukcyjną lub pojemnościową przy pulsacji rezonansowej ω_0 :

$$\rho_k = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (8.16)$$

Jak wynika z porównania wzorów 8.12) i (8.15),

$$G_k = \frac{R_L}{(\omega_0 L)^2} + \frac{R_C}{(\omega_0 C)^2}. \quad (8.17)$$

Podstawiając do (8.17) przekształcone wyrażenia (8.7) określające dobroć cewki i kondensatora, otrzymamy równość

$$G_k = \frac{1}{\omega_0 L Q_{L0}} + \frac{\omega_0 C}{Q_{C0}}. \quad (8.18)$$

Po uwzględnieniu impedancji falowej (8.16), z powyższego równania otrzymujemy

$$G_k = \frac{1}{\rho_k Q_{L0}} + \frac{1}{\rho_k Q_{C0}} = \frac{1}{\rho_k} \left(\frac{1}{Q_{L0}} + \frac{1}{Q_{C0}} \right). \quad (8.19)$$

Jak można wykazać, suma w nawiasie powyższego wzoru określa całkowitą dobroć omawianego obwodu:

$$\frac{1}{Q_k} = \frac{1}{Q_{L0}} + \frac{1}{Q_{C0}}; \quad (8.20)$$

z wyrażenia (8.19) otrzymujemy więc

$$G_k = \rho_k^{-1} Q_k^{-1}. \quad (8.21)$$

Odwrotność dobroci jest równa tzw. tangensowi kąta stratności obwodu δ_k :

$$Q_k^{-1} = \operatorname{tg} \delta_k. \quad (8.22)$$

Ze wzoru (8.22) wynika, że im większa wartość $\operatorname{tg} \delta_k$ obwodu, tym mniejsza jest jego dobroć.

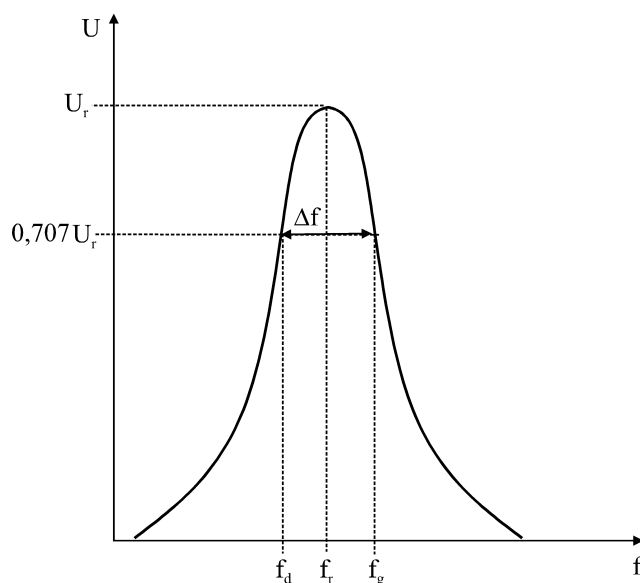
Krzywą rezonansową równoległego obwodu LC przedstawia rys. 8.3. Jak wynika z rysunku, częstotliwości rezonansowej f_r odpowiada maksimum napięcia U_r , mierzonego na zaciskach obwodu. Zgodnie z przyjętą terminologią, częstotliwość f_d nazwiemy dolną częstotliwością graniczną, częstotliwość f_g — górną częstotliwością graniczną. Częstotliwości te odpowiadają spadkowi napięcia na zaciskach obwodu, określonemu proporcją

$$U(f_g, f_d) = \frac{U_r}{\sqrt{2}} = 0,707U_r. \quad (8.23)$$

Proporcja (8.23) przedstawia wartości umowne, przyjęte w elektrotechnice, elektronice i fizyce do określania wartości granicznych pasma przenoszenia obwodów i urządzeń¹. Częstości f_d i f_g wyznaczają szerokość pasma przenoszenia obwodu:

$$\Delta f = f_g - f_d. \quad (8.24)$$

¹ Jeżeli do opisu stosunku wartości wielkości fizycznych używa się skali logarytmicznej wyrażonej w decybelach, to tłumienie o wartości $\sqrt{2}$ odpowiada wartości -3 dB ($20 \lg \sqrt{2} = 3,0103002 \approx 3$ dB).

Rysunek 8.3. Krzywa rezonansowa równoległego obwodu LC

Korzystając ze wzoru (8.24) można napisać wyrażenie definiujące dobroć obwodu Q :

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f}. \quad (8.25)$$

Zapiszmy teraz jedną z możliwych postaci prawa Ohma dla omawianego obwodu,

$$U^{-1} = I^{-1} (G_z + G_k), \quad (8.26)$$

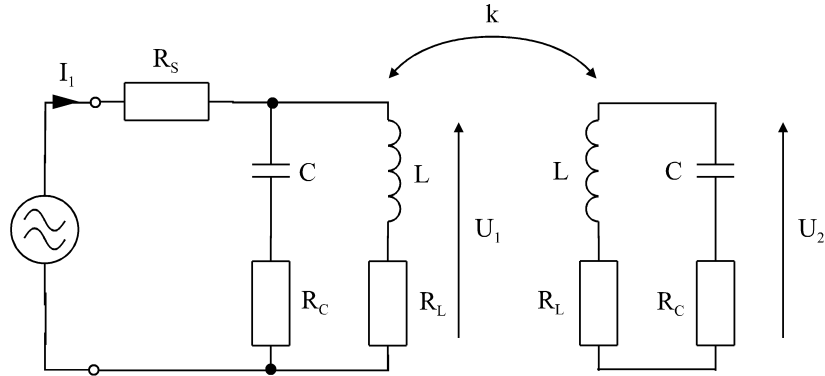
w której U jest napięciem na zaciskach obwodu, I - prądem pobieranym przez obwód z generatora, G_z — konduktancją zewnętrznego, równoległego rezystora tłumiącego obwód. W przypadku gdy wartość prądu I jest stała, tzn. nie zależy od częstotliwości, równanie (8.26) przedstawia linię prostą. Sporządzając wykres funkcji (8.26) dla różnych wartości G_z oraz ekstrapolując dla $U^{-1} \rightarrow 0$, można wyznaczyć wartość konduktancji G_k (por. wzór (8.15)). Jest to tzw. metoda Pauliego wyznaczania równoległej konduktancji obwodu LC .

2. Dwuobwodowy filtr pasmowy powstaje przez sprzężenie (np. indukcyjne) dwóch obwodów rezonansowych. Wielkość sprzężenia określana jest wartością współczynnika k , zdefiniowanego zależnością

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (8.27)$$

gdzie M jest tzw. indukcyjnością wzajemną,

$$M^2 \leq L_1 L_2. \quad (8.28)$$



Rysunek 8.4. Schemat dwuobwodowego filtra pasmowego o sprzężeniu indukcyjnym

W powyższych wzorach L_1 i L_2 są indukcyjnościami sprzężonych ze sobą cewek; w szczególnym przypadku, jeżeli cewki są identyczne, $L_1 = L_2 = L$. Z nierówności (8.28) wynika, że

$$0 \leq k \leq 1. \quad (8.29)$$

Jeżeli $k = 1$ ($M^2 = L_1 L_2$) sprzężenie jest całkowite, jeżeli $k = 0$ ($M = 0$) sprzężenie nie występuje.

Schemat dwuobwodowego filtra pasmowego przedstawia rys. 8.4. Jeżeli przez obwód I płynąć będzie prąd I_1 , na zaciskach obwodu II zostanie wzbudzone napięcie U_2 . Gdy oba obwody są dostrojone do częstotliwości rezonansowej, napięcie U_2 osiąga maksimum przy krytycznym współczynniku sprzężenia,

$$k = k_{kr} = \operatorname{tg} \delta_k. \quad (8.30)$$

Wraz ze wzrostem sprzężenia, tj. gdy

$$k > k_{kr} \quad (8.31)$$

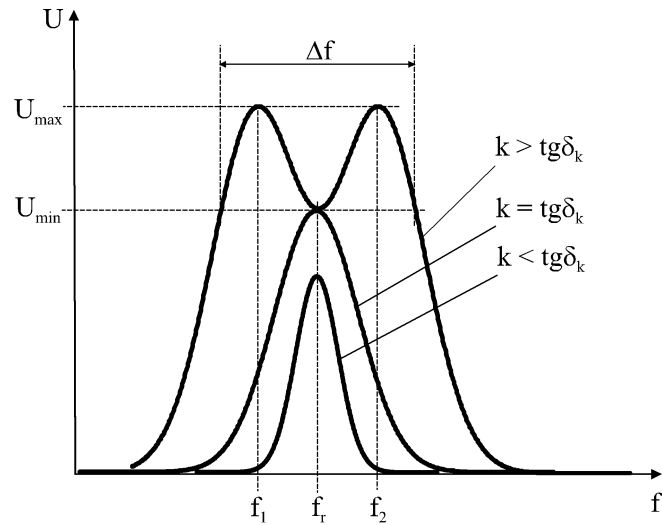
(sprężenie nadkrytyczne), na krzywej przenoszenia pojawiają się wierzchołki (rys. 8.5). Ich wzajemna odległość jest tym większa, im większe jest k . Szerokość pasma Δf filtra o sprzężeniu nadkrytycznym wyznaczana jest poprzez częstotliwości, przy których napięcie odpowiadające wierzchołkom krzywej U_{max} spada do wartości U_m , odpowiadającej częstotliwości środkowej filtra:

$$\Delta f = \sqrt{2} (f_2 - f_1). \quad (8.32)$$

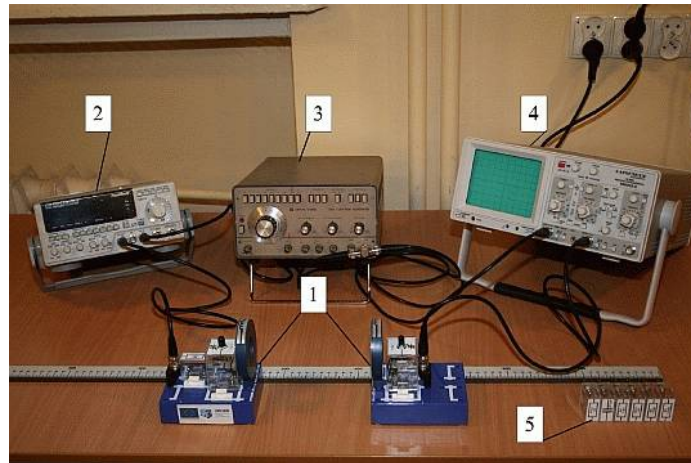
Poprzez pomiar napięć U_m oraz U_{max} możliwe jest określenie odpowiadającej im wartości współczynnika sprzężenia k , zgodnie ze wzorem

$$k = \operatorname{tg} \delta_k \left[\frac{U_{max}}{U_m} \pm \sqrt{\left(\frac{U_{max}}{U_m} \right)^2 - 1} \right], \quad (8.33)$$

w którym δ_k jest kątem stratności pojedynczego obwodu.



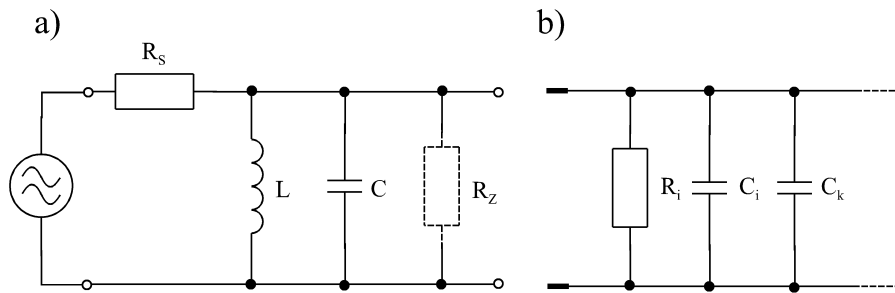
Rysunek 8.5. Charakterystyka częstotliwościowa filtra pasmowego przy różnych współczynnikach sprzężenia



Rysunek 8.6. Aparatura pomiarowa do badania sprzężonych obwodów LC . 1 — obwody LC na płytkach montażowych, 2 — generator w.cz. 3 — generator przebiegu piłokształtnego (wobulujący), 4 — oscyloskop, 5 — zamienne elementy RC

8.3. Aparatura pomiarowa

Aparaturę pomiarową stosowaną w ćwiczeniu przedstawia rys. 8.6. W jej skład wchodzi wobulowany generator wielkiej częstotliwości, badane obwody oraz oscy-



Rysunek 8.7. Schemat układu pomiarowego do badania pojedynczego obwodu LC

loskop. Obwody LC zestawiane są na płytkach połączeniowych. Odległość między obwodami mierzona jest za pomocą przymiaru z podziałką milimetrową.

8.4. Zadania

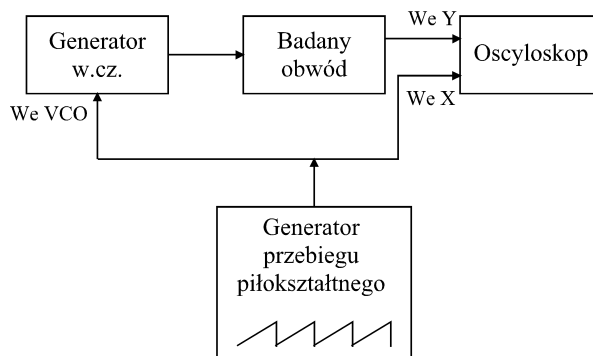
1. Na podstawie krzywej rezonansowej pojedynczego obwodu LC określić jego dobroć oraz wartość tangensa kąta stratności.
2. Przy pomocy metody Pauliego wyznaczyć wartość konduktancji równoległej G_k obwodu. Następnie określić sumaryczną wartość pojemności, wartość impedancji charakterystycznej ρ_k oraz tangensa kąta stratności δ obwodu.
3. W przypadku filtra pasmowego wyznaczyć wartość współczynnika sprzężenia oraz szerokość pasma przenoszenia w funkcji odległości między cewkami.

8.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

ad1. Schemat układu pomiarowego przedstawia rys. 8.7. Badany obwód LC zasilany jest poprzez sprzęgający rezystor szeregowy R_s z generatora sinusoidalnego sygnału w.cz. Do elementów LC w trakcie pomiarów dołączany jest dodatkowy rezystor R_z . Sygnał na zaciskach obwodu badany jest za pomocą oscyloskopu. Ze względu na pracę układu przy częstotliwościach rzędu setek kHz, wymagane jest uwzględnienie wpływu na badany obwód rezystancji wejściowej oscyloskopu, $R_i = 1\text{ M}\Omega$ oraz jego pojemności wejściowej, $C_i = 30\text{ pF}$, a także pojemności kabla połączeniowego, $C_k = 80\text{ pF}$.

W układzie pomiarowym zastosowano tzw. wobulator częstotliwości, którego schemat blokowy przedstawia rys. 8.8. Działanie urządzenia jest następujące. Częstotliwość generatora zasilającego obwód LC można zmieniać w pewnych granicach poprzez przyłożenie do specjalnego wejścia napięcia sterującego². W układzie wobulatora wejście to sterowane jest z dodatkowego generatora przebiegu piłokształnego. Częstotliwość sygnału w.cz. będzie więc zmieniać się liniowo, wślad za liniowo narastającym

² Jest to wejście układu tzw. oscylatora kontrolowanego napięciem (VCO — Voltage Controlled Oscillator).



Rysunek 8.8. Schemat blokowy wobulatora częstotliwości

napięciem piłokształtnym, a następnie szybko wracać do wartości początkowej. To samo napięcie piłokształtne podawane jest również do wejścia X oscyloskopu, sterując odchyleniem strumienia elektronów w kierunku poziomym. Ponieważ wejście Y oscyloskopu podłączone jest do badanego obwodu, przy odpowiednim doborze zakresu częstotliwości wytwarzanych przez generator w.cz., na ekranie oscyloskopu otrzymamy obraz jego krzywej rezonansowej. Eliminuje się w ten sposób konieczność wyznaczania krzywej metodą „punkt po punkcie”.

Przed przystąpieniem do pomiarów należy pokrętko amplitudy generatora w.cz. ustawić w położenie maksymalne, przełącznik zakresu częstotliwości w położenie „ $\times 1$ M”, pokrętko regulatora częstotliwości na ok. połowę skali.

Na wstępie badamy obwód złożony z cewki o 150 zwojach oraz kondensatora o pojemności 480 pF. Na ekranie oscyloskopu powinna być widoczna krzywa rezonansowa. Jeśli tak nie jest, należy skorygować parametry pracy wobulatora. W celu dokładnego określenia częstotliwości f_d , f_r oraz f_g (por. rys.8.3), należy zmniejszyć do zera amplitudę sygnału piłokształtnego sterującego generator w.cz., a następnie — zmieniając ręcznie jego częstotliwość — znaleźć wymagane częstotliwości. Funkcję woltomierza napięcia na zaciskach badanego obwodu pełni w tym przypadku oscyloskop. Opisane pomiary należy powtórzyć co najmniej 5-krotnie, uśredniając otrzymane wyniki. Wykorzystując znalezione częstotliwości wyznaczyć dobroć obwodu Q . Należy przypomnieć, że otrzymana w ten sposób wartość dobroci dotyczy obwodu LC wraz z dołączonymi równolegle: rezystancją wejściową oscyloskopu R_i , jego pojemnością wejściową wraz z pojemnością kabla, $C_i + C_k$ oraz rezystancją sprzęgającą R_s . Niepewność poszukiwanej wielkości obliczyć ze wzoru

$$\Delta Q = \left| \frac{\Delta f_r}{f_g - f_d} \right| + \left| -\frac{f_r}{(f_g - f_d)^2} \Delta f_g \right| + \left| \frac{f_r}{(f_g - f_d)^2} \Delta f_d \right|, \quad (8.34)$$

w którym niepewności wyznaczenia częstotliwości określone są jako odchylenia standardowe:

$$\Delta f_{d,g,r} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{f}_{d,g,r} - f_{di,gi,ri})^2}{n-1}} \quad (8.35)$$

W powyższym wzorze $\bar{f}_{d,g,r}$ oznacza wartości średnie odpowiednio częstotliwości dolnej, górnej i rezonansowej obwodu, $f_{di,gi,ri}$ — wartości zmierzone w i -tym pomiarze, n — liczbę pomiarów. Na podstawie otrzymanych wyników wyznaczyć wartość tangensa kąta stratności. W rachunku niepewności przyjąć, że

$$\frac{\Delta \operatorname{tg} \delta_k}{\operatorname{tg} \delta_k} = \frac{\Delta Q_k}{Q_k}. \quad (8.36)$$

ad.2. W celu wyznaczenia konduktancji równoległej obwodu metodą Pauliego należy włączyć sygnał piłokształtny i nastawić jego amplitudę tak, aby krzywa rezonansowa zajmowała całą szerokość ekranu oscyloskopu. Przy wartościach elementów LC z poprzednich pomiarów odczytać wartość U_r napięcia rezonansowego. Następnie dołączyć do obwodu rezystor R_z (por. rys. 8.7) o oporze kolejno 1 M Ω , 100 k Ω , 82 k Ω , 47 k Ω oraz 22 k Ω i mierzyć odpowiadające im wartości napięcia U_r . W trakcie pomiarów należy zwrócić uwagę na zmieniający się kształt krzywej rezonansowej — wskazane jest sporządzanie odpowiednich szkiców. Ponieważ, zgodnie z wyrażeniem (8.26),

$$U^{-1} \sim (G_z + G_k), \quad (8.37)$$

gdzie

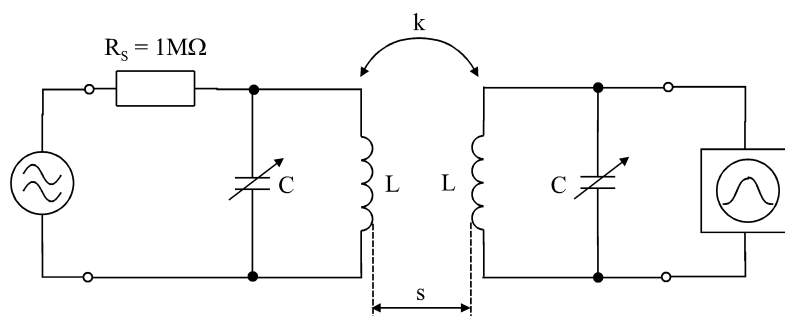
$$G_z = \frac{1}{R_z} + \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_i} \quad (8.38)$$

(prąd I możemy uważać za niezależny od częstotliwości), zależność (8.26) powinna na wykresie przedstawiać linię prostą o ogólnym równaniu

$$y = Ax + B, \quad (8.39)$$

gdzie $x = G_z$, $y = U^{-1}$, $A = I^{-1}$, $B = G_k/I$. Wartości parametrów A i B prostej i niepewności S_A i S_B wyznaczyć metodą regresji liniowej, aproksymując zależności doświadczalne funkcją (8.39). Prosta narysować na wykresie. Z otrzymanej prostej wyznaczyć wartość $I = A^{-1}$ wraz z niepewnością $S_I = S_A/A^2$ prądu pobieranego przez obwód a następnie wyznaczyć wartość konduktancji równoległej $G_k = BI$ obwodu wraz z niepewnością $S_{Gk} = IS_B$. Z kolei, korzystając ze wzoru (8.16) wyznaczyć wartość impedancji falowej ρ_k . Do obliczeń należy przyjąć C równe sumie wszystkich pojemności występujących w układzie oraz znaną pulsację rezonansową ω_r . Korzystając z otrzymanych wyników wyznaczyć dobroć obwodu Q_k oraz wartość tangensa kąta stratności δ_k . Wyniki należy porównać z rezultatami otrzymanymi w poprzednim punkcie. Niepewności wyznaczanych wielkości obliczamy ze wzorów

$$\Delta \rho_k = \left| -\frac{\Delta \omega_0}{\omega_0^2 C} \right| + \left| -\frac{\Delta C}{\omega_0 C^2} \right|, \quad (8.40)$$



Rysunek 8.9. Schemat ideowy układu do badania filtra pasmowego

$$\Delta Q_k = \left| -\frac{\Delta \rho_k}{\rho_k^2 G_k} \right| + \left| -\frac{\Delta G_k}{\rho_k G_k^2} \right|, \quad (8.41)$$

oraz ze wzoru (8.36). Występującą w powyższych wzorach wielkość $\Delta \omega_r$ określamy ze wzoru (8.35), ΔC — na podstawie tolerancji zastosowanego kondensatora, ΔG_k — na podstawie wyników regresji liniowej.

ad.3. Schemat ideowy układu do badania dwuobwodowego filtra pasmowego przedstawia rys. 8.9.

Jak wynika ze schematu, sprzężone indukcyjnie obwody LC składają się z cewek o indukcyjności L (każda z nich ma 150 zwojów) oraz identycznych kondensatorów nastawnych o pojemności regulowanej w zakresie od 8 pF do 500 pF.

Badania filtra wykonujemy w układzie wobulatora (por. rys.8.8). Na wstępie cewki umieszczamy w odległości ok. 20 cm. Obracając pokrętłami kondensatorów należy zestroić obwody na tę samą częstotliwość (krzywa na ekranie oscyloskopu powinna być jednowierzchołkowa). Następnie należy wykonać serię pomiarów napięć i częstotliwości przy malejącej odległości pomiędzy cewkami — poczynając od sprzężenia podkrytycznego, poprzez krytyczne do nadkrytycznego. Przy sprzężeniu nadkrytycznym należy określić zależność współczynnika k oraz pasma przenoszenia filtra od odległości między cewkami. Otrzymane wyniki należy przedstawić na wykresach. Na wykresach należy również przedstawić przebieg oraz równanie funkcji aproksymującej wyniki doświadczalne.

Wyniki otrzymane w ćwiczeniu należy przedyskutować. Tam, gdzie jest to możliwe należy sprawdzić ich zgodność (lub jej brak) z przewidywaniami teoretycznymi.

8.6. Wymagane wiadomości

1. Prąd zmienny i charakteryzujące go wielkości.
2. Równoległy obwód LC (elementy idealne) w obwodzie prądu zmiennego. Rezonans prądów.

3. Rzeczywista cewka i rzeczywisty kondensator w obwodzie prądu zmiennego. Dobroć i tangens kąta stratności.
4. Sprzężone obwody LC .

8.7. Literatura

- [1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, t.3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] E.M. Purcell — Elektryczność i magnetyzm, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974.
- [3] Cz. Rajski — Teoria obwodów, t.1, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1971.

Ćwiczenie 9

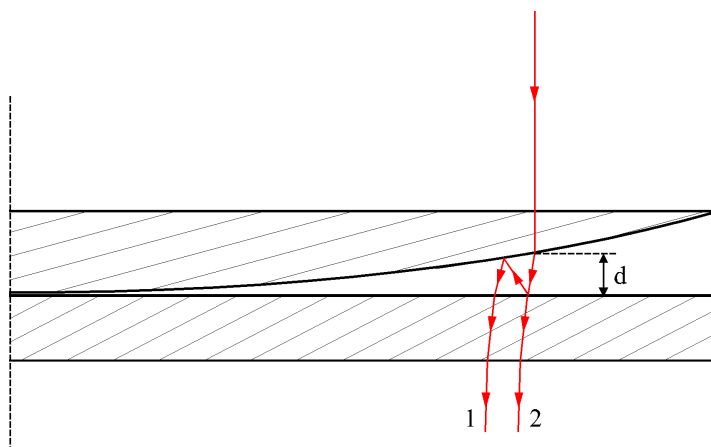
Wyznaczanie promienia krzywizny soczewki za pomocą pierścieni Newtona

9.1. Zasada ćwiczenia

Pierścienie Newtona powstają wskutek interferencji światła przechodzącego przez płaskowypukłą soczewkę o małej krzywiznie, przylegającą zakrzywioną powierzchnią do płaskorównoległej, przezroczystej płytki. Mierząc promienie pierścieni dla kilku długości fal padającego światła wyznacza się promień krzywizny soczewki.

9.2. Wiadomości teoretyczne

W celu przeanalizowania mechanizmu powstawania pierścieni Newtona posłużymy się rys. 9.1. Przedstawia on bieg przykładowych promieni światła w układzie płaskowypukłej soczewki i płaskorównoległej płytki ze znajdującą się między nimi warstwą powietrza o zmiennej grubości. Oświetlmy układ równoległą wiązką światła monochromatycznego. Docierający poprzez soczewkę promień częściowo odbija się od powierzchni płytki; odbita część powraca w kierunku sferycznej powierzchni soczewki,



Rysunek 9.1. Powstawanie pierścieni Newtona

odbija się od niej i ponownie dociera do płytki, opuszczając ją po dwukrotnym załamaniu (promień 1 na rys. 9.1). Zwróćmy uwagę, że mamy w tym przypadku do czynienia z dwoma odbiciami fali świetlnej od ośrodka o większej gęstości optycznej. Ponieważ każdemu z nich towarzyszy zmiana fazy fali świetlnej o π , sumaryczne przesunięcie fazy wyniesie 2π i nie ma wpływu na drogę optyczną promienia. Nieodbita część promienia padającego opuszcza płytkę po dwukrotnym załamaniu na granicy ośrodków — promień 2 na rysunku¹. Różnica dróg optycznych promieni 1 i 2 dana jest więc wzorem

$$\Delta = 2d, \quad (9.1)$$

w którym d jest grubością warstwy powietrza w punkcie odległym o r od środka soczewki. Skoncentrujmy uwagę na prążkach jasnych, tj. będących skutkiem konstruktywnej interferencji promieni 1 i 2. Odpowiedni warunek ma postać²

$$\Delta = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

(λ jest długością fali świetlnej). Otrzymujemy zatem równanie

$$2d = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.3)$$

Korzystając z podobieństwa trójkątów ACE i CDE (trójkąt ACD , jako wpisany w okrąg, jest trójkątem prostokątnym) — rys. 9.2 — uzyskujemy proporcję

$$\frac{d}{r_n} = \frac{r_n}{2R - d}. \quad (9.4)$$

W powyższym wzorze R jest promieniem krzywizny soczewki, r_n — promieniem n -tego jasnego prążka. Warto zauważyć, że zgodnie z formułą (9.3) długość odcinka d odpowiadającego kolejnym prążkom wzrasta o $\lambda/2$. Prążki interferencyjne układają się więc warstwicowo (rys. 9.3). Ponieważ promień soczewki jest bardzo duży, rzędu kilku bądź kilkunastu metrów, można przyjąć, że $d \ll R$. Odrzucając wobec tego d w mianowniku wyrażenia (9.4) i korzystając z zależności (9.3) otrzymujemy wzór

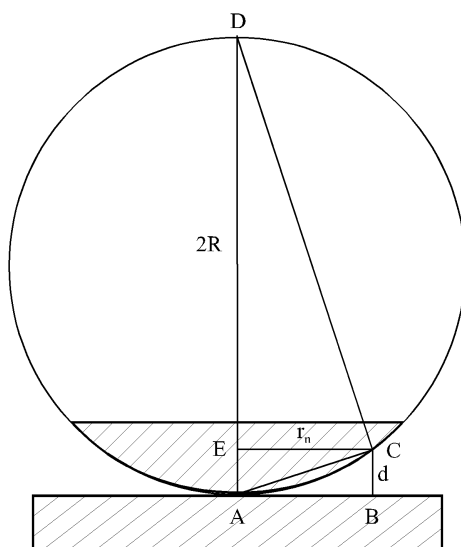
$$r_n^2 = nR\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.5)$$

Warto zauważyć, że przy oświetleniu układu światłem białym, każda składowa widma będzie wytwarzać swój zbiór pierścieni. Zbiory te będą się na siebie nakładać. W rezultacie obserwator dostrzeże pierścienie o kolorach tęczy. Promień n -tego prążka wytworzonego przez składową widma o długości fali λ można łatwo wyznaczyć korzystając ze wzoru (9.5).

Pierścienie Newtona można również zaobserwować w świetle odbitym. Wówczas promień światła po przejściu przez płaską powierzchnię soczewki zostaje częściowo odbity na granicy jej spodniej, sferycznej powierzchni i otaczającego powietrza. Część światła przechodzi przez tę granicę i dociera do granicy powietrze - płytka. Po odbiciu

¹ Ze względu na duży promień krzywizny soczewki (rzędu kilku - kilkunastu metrów), promienie świetlne padające i odbijające się od płytki są praktycznie równoległe do niej.

² Wyprowadzenie wzoru (9.2) zawiera instrukcja do ćwiczenia pt. „Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu za pomocą interferometru Quinckego”.



Rysunek 9.2. Geometria układu soczewka - płytka płaskorównoległa

od powierzchni płytki światło powraca w kierunku powierzchni soczewki i dociera do niej po przebyciu drogi geometrycznej $2d$. Ponieważ promień docierający do płytki odbija się od powierzchni ośrodka o większej gęstości optycznej, zjawisku temu towarzyszy zmiana fazy fali świetlnej o π . Odpowiada to przebyciu przez falę dodatkowej drogi równej połowie jej długości, $\lambda/2$. Oznacza to, że różnica dróg optycznych

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}. \quad (9.6)$$

Zauważmy, że interferujące fale będą się wygaszać, zgodnie z warunkiem

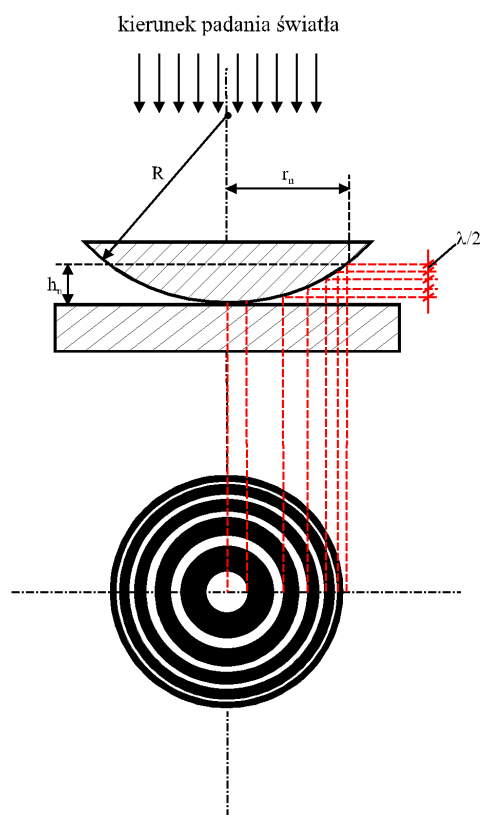
$$\Delta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda. \quad (9.7)$$

Z powyższych wyrażeń otrzymamy ponownie wzory (9.3) i (9.5). W obrazie interferencyjnym widocznym w świetle odbitym w miejscu prążków jasnych obserwować będziemy prążki ciemne.

9.3. Aparatura pomiarowa

Stosowaną w ćwiczeniu aparaturę przedstawia rys. 9.4.

Źródłem światła jest wysokociśnieniowa lampa rtęciowa zaopatrzona w układ optyczny, wytwarzający równoległą wiązkę światła. Wiązka ta, po przejściu przez soczewkę pada na zespół soczewka - płytka, wytwarzający pierścienie Newtona. Zespół ten posiada naciętą oś układu współrzędnych, zaopatrzoną w podziałkę. Przechodzące przez

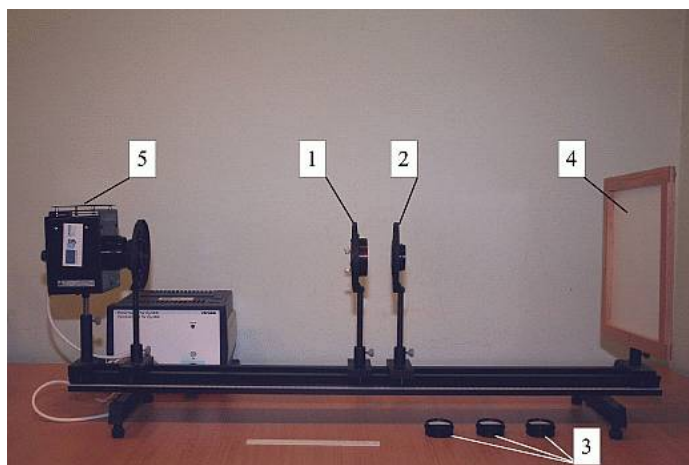


Rysunek 9.3. Ilustracja warstwicowego ułożenia pierścieni Newtona

układ Newtona światło przepuszczone jest przez filtr interferencyjny, wydzielający pierścienie wytworzone przez światło o żądanej długości fali. Powstający w ten sposób obraz rzutowany jest na biały ekran. Wszystkie elementy układu zmontowane są na ławie optycznej.

9.4. Zadania

Wyznaczyć promienie pierścieni Newtona widocznych na ekranie przy zastosowaniu filtru żółtego, zielonego i niebieskiego i obliczyć promień krzywizny soczewki.



Rysunek 9.4. Aparatura do badania pierścieni Newtona. 1 — zespół wytwarzający pierścienie Newtona, 2 — Soczewka z uchwytem do filtrów interferencyjnych, 3 — zestaw filtrów interferencyjnych, 4 — ekran, 5 — lampa rtęciowa z układem wytwarzającym równoległą wiązkę światła

9.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Uwaga: zastosowana aparatura składa się z delikatnych przyrządów optycznych. Powierzchni szkieł nie wolno dotykać palcami, a wszelkie regulacje należy przeprowadzać bardzo delikatnie.

Czynność włączenia lampy należy powierzyć osobie prowadzącej ćwiczenie. Pomiar wykonujemy po rozgrzaniu się lampy rtęciowej, co trwa ok. 10 minut (uwaga: obudowa lampy silnie się nagrzewa!). Przed rozpoczęciem pomiarów konieczne jest sprawdzenie, czy widoczne na ekranie pierścienie nie są zniekształcone. W przeciwnym przypadku należy poprosić osobę prowadzącą ćwiczenie o dokonanie niezbędnych regulacji. Następnie, korzystając z widocznej na ekranie skali, wyznaczyć promienie możliwie największej liczby pierścieni. Aby zwiększyć dokładność wyników, mierzymy średnicę danego pierścienia. Pomiar przeprowadzamy stosując filtry o co najmniej dwóch barwach.

W celu wyznaczenia promienia krzywizny soczewki zauważmy, że równanie (9.5) jest funkcją $r_n^2 = f(n)$ o postaci

$$Y = AX + B, \quad (9.8)$$

w której $X = n$, $Y = r_n^2$, $A = R\lambda$, $B = 0$. Wartości parametrów A i B prostych oraz ich niepewności S_A i S_B należy wyznaczyć metodą regresji liniowej, aproksymując doświadczalne zależności $r_n^2 - n$ funkcją (9.8). Proste należy narysować na wykresie. Następnie wyznaczyć wartości promienia krzywizny soczewki $R_i = A_i/\lambda_i$ dla poszczególnych długości λ_i fali świetlnej wraz z odpowiednimi niepewnościami $S_{R_i} = S_{A_i}/\lambda_i$.

Obliczyć średnią arytmetyczną \bar{R} wyznaczonych promieni krzywizny i jej maksymalną niepewność $S_{\bar{R}} = (\max S_{R_i} / \sqrt{m}, i = 1, \dots, m)$ (m — liczba długości fal stosowanych w pomiarach).

9.6. Wymagane wiadomości

1. Prawo załamania i odbicia.
2. Zjawisko interferencji — wyprowadzenie wzoru opisującego warunek powstania prążków jasnych i ciemnych.
3. Działanie filtra interferencyjnego.

9.7. Literatura

- [1] D. Haliday, R. Resnick, J. Walker — Podstawy fizyki, t. 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [2] A. Januszajtis — Fizyka dla politechnik, t. III Fale, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
- [3] S. Szczeniowski — Fizyka doświadczalna, cz. IV Optyka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983.

Ćwiczenie 10

Badanie dyfrakcji fal de Broglie'a elektronów

10.1. Zasada ćwiczenia

Elektrony emitowane z rozżarzonej katody lampy próżniowej i przyspieszane wysokim napięciem padają na polikrystaliczną warstwę grafitu i ulegają na niej dyfrakcji. Powstający obraz interferencyjny w postaci koncentrycznych pierścieni obserwowany jest na fluoroscencyjnym ekranie lampy. Mierząc średnice pierścieni oraz napięcie przyspieszające elektrony wyznacza się odległości międzypłaszczyznowe w strukturze grafitu.

10.2. Wiadomości teoretyczne

10.2.1. Hipoteza de Broglie'a fal materii

Według ogłoszonej w roku 1924 przez Louisa de Broglie'a hipotezy materia, podobnie jak promieniowanie elektromagnetyczne, ma dwoistą, korpuskularno-falową naturę. Wiadomo, że do fotonu przypisana jest pewna fala świetlna, która określa jego ruch. Tak samo jest z cząstką materialną, z którą stowarzyszona jest fala materii, rządząca jej ruchem. Tak jak w przypadku promieniowania, można powiązać ilościowo cechy falowe cząstek materialnych z ich cechami korpuskularnymi. Zgodnie z tym poglądem, energia całkowita E dowolnego fizycznego obiektu określana jest następującą relacją

$$E = hf, \quad (10.1)$$

gdzie f jest częstotliwością stowarzyszonej fali, opisującej ruch obiektu fizycznego, a h — stałą Plancka, której wartość wynosi $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$ J·s. Z kolei pęd p tego obiektu opisany jest wzorem

$$p = \frac{h}{\lambda}, \quad (10.2)$$

gdzie λ jest długością przypisanej fali. Charakterystyczne dla cząstki wielkości — energia i pęd są zatem związane z wielkościami charakterystycznymi dla fali — częstotliwością i długością za pośrednictwem stałej Plancka.

Wyrażenie (10.2), przekształcone do postaci

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (10.3)$$

nosi nazwę wzoru de Broglie'a. Określa on długość fali materii skojarzonej z ruchem cząstki materialnej o danym pędzie, zwaną długością fali de Broglie'a.

Obliczmy teraz długość fali de Broglie'a elektronu przyspieszonego przez napięcie U_A . Jego końcowa energia kinetyczna będzie wówczas równa pracy pola elektrycznego,

$$E_k = W. \quad (10.4)$$

Ponieważ

$$E_k = \frac{p^2}{2m}, \quad (10.5)$$

$$W = eU_A, \quad (10.6)$$

gdzie $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg — ładunek i masa spoczynkowa elektronu, pęd elektronu

$$p = \sqrt{2meU_A}, \quad (10.7)$$

a długość jego fali de Broglie'a, zgodnie z wzorem (10.3),

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU_A}}. \quad (10.8)$$

Powyższy wzór można, po podstawieniu wartości stałej Plancka oraz ładunku i masy elektronu, zapisać jako

$$\lambda = \frac{0,3878}{\sqrt{U_A}} [\text{Å}], \quad (10.9)$$

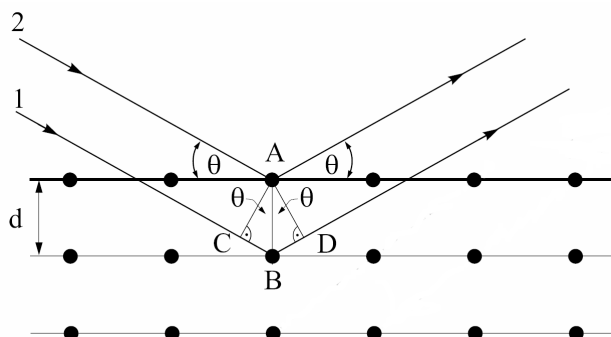
gdzie $[U_A] = \text{kV}$. Przykładowo, długość fali de Broglie'a elektronu przyspieszonego napięciem $U_A = 1$ kV wynosi $\lambda \approx 0,39$ Å.

Narzuca się pytanie: dlaczego w życiu codziennym nie zauważamy dyfrakcji fal materii? Mamy tutaj sytuację analogiczną jak w optyce geometrycznej, która nie uwzględnia falowego charakteru rozchodzenia się światła. Spowodowane jest to dużymi rozmiarami geometrycznymi przeszkód w porównaniu z długością fali świetlnej. Prawa optyki geometrycznej mają zastosowanie w przypadku gdy $\lambda/a \rightarrow 0$, gdzie λ jest długością fali światła przechodzącego przez przyrząd, natomiast a jest charakterystycznym rozmiarem przyrządu optycznego (np. szerokość zwierciadła, soczewki, przesłony lub szczeliny). Wynika to z faktu, że występowanie zjawisk dyfrakcyjnych w przyrządzie jest ograniczone do kątów równych w przybliżeniu $\theta = \lambda/a$. Zatem, gdy $\lambda/a \rightarrow 0$, zjawiska te są zaniedbywalne.

Obszar optyki fizycznej (falowej) obejmuje natomiast przypadki gdy rozmiar a przyrządu jest porównywalny lub mniejszy od długości fali świetlnej λ . Łatwo wtedy można zaobserwować efekty dyfrakcyjne, ponieważ $\lambda/a \geq 1$ i kąt ugięcia fali $\theta = \lambda/a$ jest duży. Widoczna staje się wtedy falowa natura światła. W przypadku fal de Broglie'a należy więc dysponować układem fizycznym mającym odpowiednio małe rozmiary przesłony lub otworów. Tylko wtedy możliwe jest zaobserwowanie falowych aspektów ruchu cząstek materialnych.

10.2.2. Dyfrakcja fal na kryształach. Wzór Bragga

W 1926 r. W. M. Elsasser zaproponował, sprawdzenie falowej natury elektronów metodą analogiczną do używanej wcześniej do badania struktury ciał stałych przez dyfrakcję promieniowania rentgenowskiego. W tym celu wiązkę elektronów należało skierować na ciało krystaliczne. Atomy kryształu układają się w trójwymiarową siatkę dyfrakcyjną, która powinna silnie rozpraszać elektrony w charakterystycznych kierunkach, przy czym odległości między najbliższymi atomami są rzędu kilku angstromów. Wykonane trzy lata później niezależne doświadczenia C. J. Davissona i L. Germera oraz G. P. Thomsona, dotyczące odpowiednio rozpraszania elektronów na monokryształach niklu oraz cienkich metalowych foliach, potwierdziły występowanie dyfrakcji fal de Broglie'a elektronów. Wyznaczone na podstawie obrazu dyfrakcyjnego długości fal zgadzały się ze wzorem (10.8).



Rysunek 10.1. Rysunek do wyprowadzenia wzoru Bragga. Przedstawione są trzy płaszczyzny atomowe i dwa promienie padającej i rozproszonej wiązki

Zarówno przy opisie dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego jak i fal de Broglie'a na kryształach podstawowe znaczenie ma wzór Bragga. Wzór ten opisuje zjawiska dyfrakcji i interferencji fal na atomowych płaszczyznach kryształu (rys. 10.1). Zakłada się, że płaszczyzny krystalograficzne są układem powierzchni równoległych, przy czym każda z nich częściowo rozprasza we wszystkich kierunkach padające fale. Docierając do płaszczyzn na różnych głębokościach fala pokonuje różną drogę. W danym kierunku dochodzi do wzmocnienia lub osłabienia natężenia fali, ze względu na różnicę dróg wiązek odbitych od różnych płaszczyzn. Jeżeli wiązka pada na powierzchnię kryształu pod kątem θ , a odległość najbliższych płaszczyzn wynosi d , to różnica dróg promieni 1 i 2, $\Delta x = CB + BD$, może być wyrażona wzorem:

$$\Delta x = 2d \sin \theta. \quad (10.10)$$

Ponieważ warunek wzmocnienia interferujących promieni ma postać¹

$$\Delta x = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (10.11)$$

¹ Wyprowadzenie wzoru (10.10) zawiera instrukcja do ćwiczenia pt. „Wyznaczanie prędkości dźwięku w powietrzu za pomocą interferometru Quinckego”.

z porównania dwóch ostatnich wzorów otrzymujemy wzór Bragga;

$$2d \sin \theta = n\lambda. \quad (10.12)$$

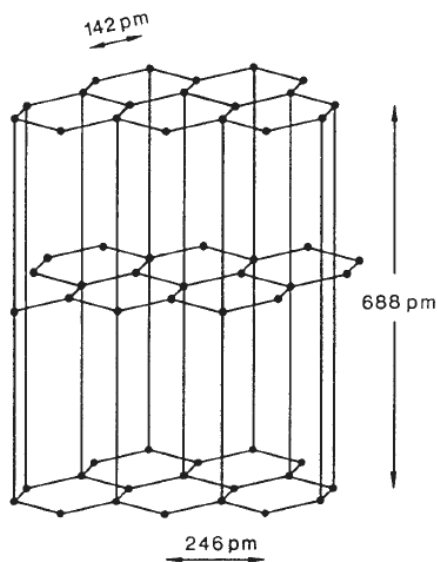
Liczbę n nazywamy rzędem maksimum interferencyjnego. Znając długość i kąt padania fali, przy których następuje jej wzmocnienie, można przy użyciu prawa Bragga określić międzypłaszczyznowe odległości w badanym kryształcie.

W przypadku dyfrakcji fal na pojedynczym kryształcie obraz dyfrakcyjny składa się z zespołu plamek. Jeżeli dyfrakcja zachodzi na próbce polikrystalicznej, zawierającej dużą liczbę chaotycznie ustawionych kryształków, na obrazie dyfrakcyjnym zamiast plamek występują koncentryczne pierścienie.

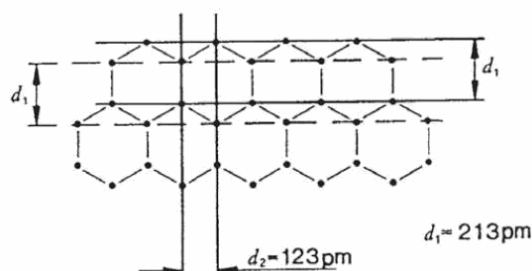
10.2.3. Struktura grafitu

Grafit stanowi alotropową odmianą węgla i jest szeroko rozpowszechniony w przyrodzie. Ma szaro-czarną barwę i metaliczny połysk, jest nieprzezroczysty. Charakteryzuje się dobrą przewodnością elektryczną oraz cieplną, przy czym jest wytrzymały na wysokie temperatury. Jest krawalny i łupliwy, ale nie rozpuszcza się w wodzie.

Czysty grafit krystalizuje w układzie heksagonalnym, przedstawionym na rys. 10.2. Jego struktura składa się z równoległych warstw atomów węgla, przy czym atomy są połączone wiązaniami kowalencyjnymi. Odległości pomiędzy najbliższymi atomami w warstwie są jednakowe i wynoszące 1,42 Å. Natomiast odległości między warstwami są większe, rzędu 3,44 Å. Powoduje to anizotropię różnych właściwości fizycznych grafitu, ponieważ wiązania między atomami w warstwie są silniejsze niż między atomami warstw sąsiadujących.



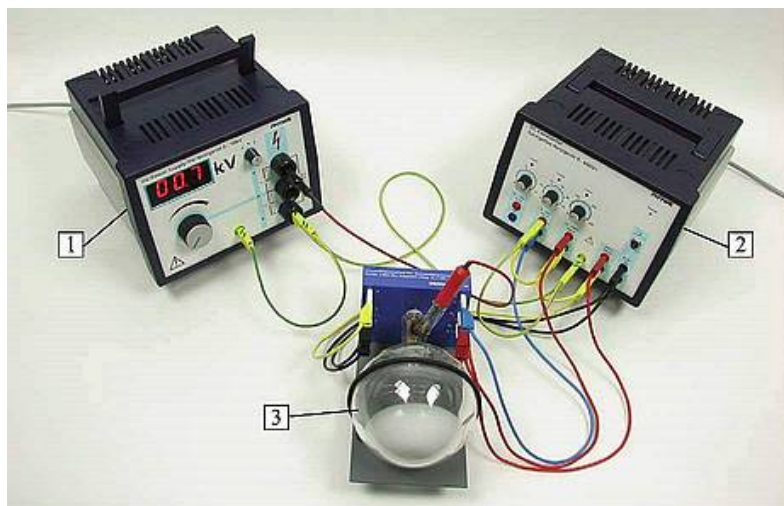
Rysunek 10.2. Sieć krystaliczna grafitu



Rysunek 10.3. Płaszczyzny atomowe w graficie dla dwóch pierwszych pierścieni dyfrakcyjnych

Ogólnie natężenie interferujących fal, rozproszonych na płaszczyznach atomowych, jest tym większe, im większa jest powierzchniowa gęstość atomów na płaszczyznach i maleje ze wzrostem rzędu n maksimów interferencyjnych. Na rys. 10.3 pokazane są płaszczyzny atomowe w graficie, dające dwa pierścienie dyfrakcyjne pierwszego rzędu o najmniejszych promieniach. Odległości sąsiednich płaszczyzn wynoszą odpowiednio $d_1 = 2,13 \text{ \AA}$ i $d_2 = 1,23 \text{ \AA}$.

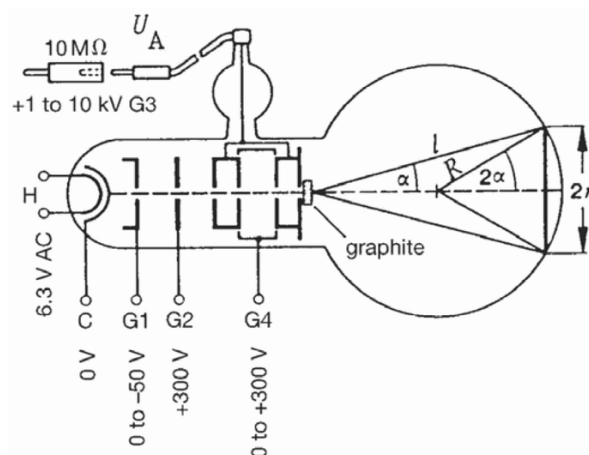
10.3. Aparatura pomiarowa



Rysunek 10.4. Aparatura do wyznaczania odległości międzypłaszczyznowych na podstawie dyfrakcji promieniowania na graficie. 1 — zasilacz wysokiego napięcia, 2 — zasilacz napięcia, 3 — lampa próżniowa

Stosowana w ćwiczeniu aparatura pomiarowa przedstawiona jest na rys. 10.4. W jej skład wchodzi: zasilacz wysokiego napięcia o zakresie 0 – 10 kV, zasilacz napięcia o zakresie 0 – 600 V, lampa próżniowa, rezystor bezpieczeństwa 10 M Ω oraz plastikowa suwmiarka do wykonywania pomiarów średnicy pierścieni interferencyjnych. W wyniku dyfrakcji elektronów, przechodzących przez polikrystaliczną warstwę grafitu, na ekranie lampy pojawiają się pierścienie interferencyjne.

Schemat na rys. 10.5 przedstawia, w jaki sposób zasilana jest lampa próżniowa używana w ćwiczeniu.



Rysunek 10.5. Schemat zasilania i połączenia lampy próżniowej z resztą układu

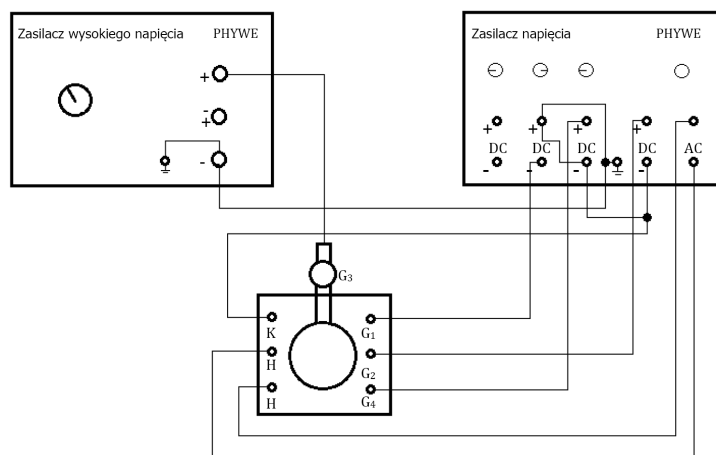
10.4. Zadania

1. Korzystając z suwmiarki dokonać pomiarów średnic dwóch najmniejszych pierścieni interferencyjnych przy różnych napięciach na anodzie.
2. Obliczyć długości fali elektronów dla poszczególnych napięć.
3. Korzystając z zależności pomiędzy promieniami pierścieni interferencyjnych a długością fali de Broglie'a wyznaczyć odległości międzyplaszczynowe w graficie.

10.5. Przebieg pomiarów i opracowanie wyników

Schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rys. 10.6. Przed przystąpieniem do pomiarów należy zestawić układ według schematu. Nie wolno włączać zasilania zanim prowadzący ćwiczenie nie sprawdzi, czy układ jest poprawnie połączony.

Po włączeniu zasilania należy rozpocząć wykonywanie pomiarów od ustawienia odpowiednich wartości na zasilaczu napięcia. Na gnieździe G_4 lampy należy ustawić wartość około 300 V, podczas przebiegu ćwiczenie będzie ona pozostawać niezmienna.



Rysunek 10.6. Schemat budowy układu pomiarowego

Na gnieździe G_1 początkową wartość ustawić na 50 V; powinna być ona zmniejszana wraz ze wzrostem napięcia na drugim zasilaczu. Następnie na zasilaczu wysokiego napięcia ustawić wartość 4 kV. W wyniku tych czynności na ekranie lampy powinny powstać wyraźne pierścienie interferencyjne.

Korzystając z suwmiarki zmierzyć średnice dwóch najmniejszych jasnych pierścieni. Dla uzyskania lepszej dokładności pomiarów należy zmierzyć wewnętrzną i zewnętrzną średnicę pierścienia i wykonać pomiar zarówno pionowych jak i poziomych średnic. Wykonując pomiar należy zwrócić uwagę by nie opierać suwmiarki na ekranie. Najlepiej trzymać ją prostopadle do ekranu, tak by jedynie ramiona suwmiarki miały z nim kontakt. Z otrzymanych wartości należy wyliczyć średnie promienie pierwszego i drugiego pierścienia. Zanotować napięcie zasilacza wysokiego napięcia, dla którego przebiegał pomiar oraz promienie obu pierścieni.

Pomiary średnic pierścieni wykonać w zakresie napięć od 4 kV do 7 kV, ze skokiem 0,5 kV. Zwiększając to napięcie należy stopniowo zmniejszać wartość napięcia na gnieździe G_1 tak, aby otrzymywać wyraźne pierścienie, lecz by intensywność światła padającego na ekran nie była zbyt duża. Uniknie się w ten sposób uszkodzenia ekranu fluoescencyjnej lampy.

Uwaga: jeżeli do wykonywania pomiarów wykorzystywana jest suwmiarka metalowa, należy używać jej ostrożnie, aby nie zarysować lub w inny sposób nie uszkodzić szklanego ekranu. Po zakończeniu pomiarów najpierw zmniejszyć do zera wartość wysokiego napięcia, a następnie zmniejszyć do zera wartości pozostałych napięć. Dopiero wtedy wyłączyć oba zasilacze.

Opracowanie wyników rozpocząć od obliczenia długości λ fali elektronów na podstawie wzoru (10.9) dla poszczególnych napięć U_A , odczytanych z zasilacza wysokiego napięcia. Znając długości fal i odpowiadające im promienie r pierścieni interferencyjnych, przedstawić na wspólnym wykresie obie zależności $r = f(\lambda)$.

W celu wyprowadzenia zależności $r = f(\lambda)$ wygodnie jest postąpić jak następuje. Z rys. 10.5 wynika, że zachodzą związki:

$$\sin 2\alpha = \frac{r}{R}, \quad (10.13)$$

$$\alpha = 2\theta, \quad (10.14)$$

gdzie $R = 65$ mm jest promieniem bańki lampy próżniowej, α — kątem odchylenia wiązki elektronów, θ — kątem Bragga. Ponieważ $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, dla kątów $\alpha \leq 10^\circ$ ($\cos 10^\circ = 0,985$) można w przybliżeniu przyjąć, że $\sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha$. Otrzymujemy stąd:

$$\sin 2\alpha \approx 4 \sin \theta, \quad (10.15)$$

$$\sin \theta = \frac{r}{4R}. \quad (10.16)$$

Korzystając teraz ze wzoru Bragga (10.12), po prostych przekształceniach otrzymujemy wzór:

$$r = \frac{2nR}{d} \lambda. \quad (10.17)$$

W rozpatrywanym przybliżeniu promień pierścienia dyfrakcyjnego jest więc liniową funkcją długości fali, mającą ogólną postać

$$Y = AX + B, \quad (10.18)$$

przy czym $X = \lambda$, $Y = r$, $A = 2nR/d$, $B = 0$. Wartości parametrów A i B prostych oraz ich niepewności S_A i S_B należy wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów, przybliżając doświadczalne zależności $r = f(\lambda)$ funkcją (10.18). Proste należy również narysować na wykresie. Następnie obliczyć wartości odległości międzypłaszczyznowych d_1 i d_2 w graficie, $d_i = 2R/A_i$, oraz ich niepewności, $S_{d_i} = 2RS_{A_i}/A_i^2$. Sprawdzić, czy wyznaczone wartości d_1 i d_2 zgadzają się w granicach niepewności pomiarowych z podanymi w podrozdziale 10.2.3.

10.6. Wymagane wiadomości

1. Fale materii. Wzór de Broglie'a.
2. Dyfrakcja i interferencja fal na kryształach. Wzór Bragga.
3. Struktura grafitu.

10.7. Literatura

- [1] R. Eisberg, R. Resnick, Fizyka kwantowa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983.
- [2] N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, Fizyka ciała stałego, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1983.