

Ćwiczenie M12

Wyznaczanie modułu Younga metodą strzałki ugięcia

M12.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości modułu Younga różnych materiałów poprzez badanie strzałki ugięcia wykonanych z nich prętów.

M12.2. Zagadnienia związane z tematyką ćwiczenia

- Budowa wewnętrzna ciał stałych,
- właściwości mechaniczne ciał stałych,
- mechanika punktu materialnego i bryły sztywnej,
- metoda najmniejszych kwadratów.

M12.3. Literatura

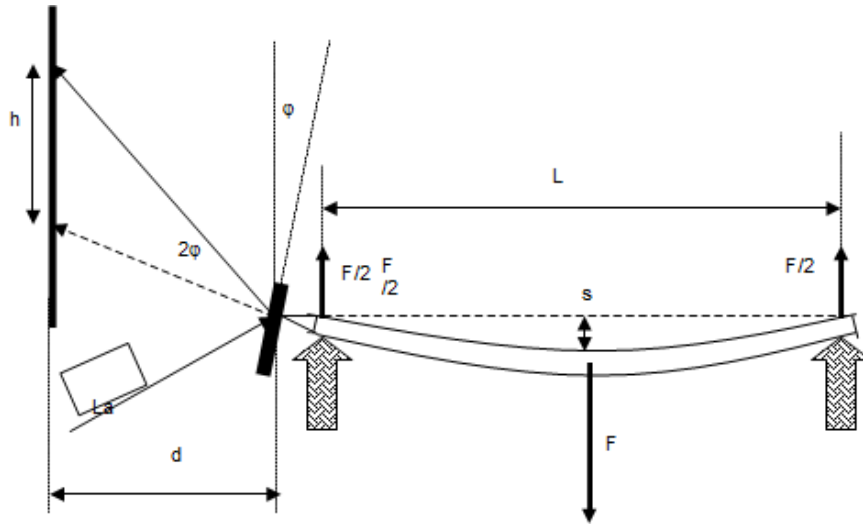
- [1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Podstawy fizyki, cz. 1*, PWN, Warszawa.
- [2] Massalski J., Massalska M.: *Fizyka dla inżynierów, cz. 1*, WNT, Warszawa.
- [3] Szczeniowski S.: *Fizyka doświadczalna, cz. 1*, PWN, Warszawa.
- [4] *Metody wykonywania pomiarów i szacowania niepewności pomiarowych*, <http://ftims.pg.edu.pl/documents/10673/20436990/wstep.pdf>

M12.4. Przebieg ćwiczenia i zadania do wykonania

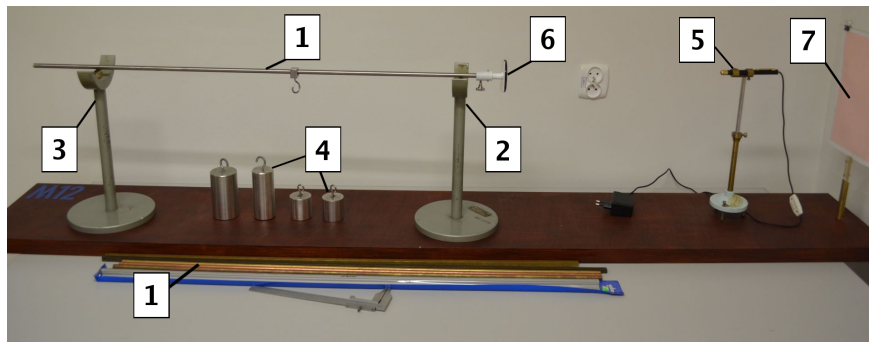
Układ doświadczalny

Rysunek M12.1 przedstawia schemat układu pomiarowego, zaś rysunek M12.2 zdjęcie układu z zaznaczonymi na schemacie elementami. W skład zestawu wcho-

dzą: **1** – badany pręt, **2,3** – wsporniki pręta, **4** – odważnik, **5** – laser z zasilaczem sieciowym, **6** – zwierciadło, **7** – podziałka.



Rysunek M12.1. Schemat układu pomiarowego

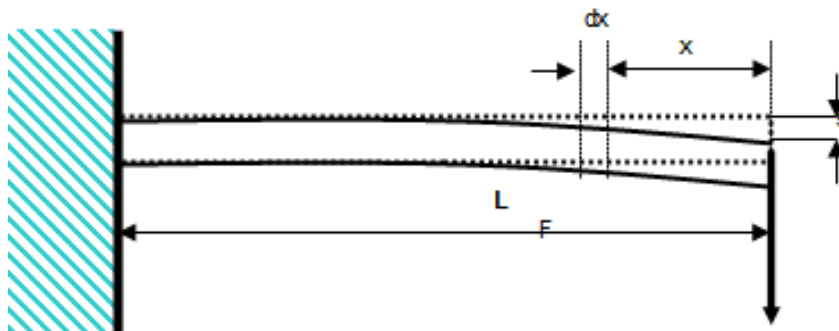


Rysunek M12.2. Zdjęcie układu pomiarowego

Przebieg doświadczenia

Najprostszy sposób wyznaczania modułu Younga polega na pomiarze przyrostu ΔL pręta o długości L , umocowanego na jednym końcu i rozciąganego (lub ściskanego) przyłożoną do drugiego końca siłą F_n . Ten sposób jest stosowany w przypadku długich i cienkich prętów. Do pomiarów prętów grubych tej metody

nie można stosować ze względu na konieczność użycia bardzo dużych sił w celu uzyskania mierzalnych wydłużeń. Dlatego w przypadku grubych prętów korzysta się z efektu zginania (rysunek M12.3).



Rysunek M12.3. Odształcenie pręta podczas jego zginania

Zginanie jest odkształceniem o charakterze złożonym, a jego miarą jest strzałka ugięcia s . Jeżeli sztywno zamocowany na jednym końcu pręt poddany jest działaniu siły F działającej prostopadle do osi pręta na drugim jego końcu, wówczas na każdy poprzeczny element o grubości dx działa moment siły dany wzorem:

$$M_x = Fx, \quad (\text{M12.1})$$

w którym x – odległość elementu dx od punktu przyłożenia siły F . Pod wpływem tego momentu siły element dx ulega odkształceniu, tak że górne jego warstwy ulegają wydłużeniu, natomiast dolne skróceniu. Całkowity efekt zginania, którego miarą jest strzałka ugięcia s , jest wypadkową opisanych powyżej efektów. Strzałka ugięcia s jest to przesunięcie końca pręta wywołane działaniem siły F . W wyniku szczegółowej analizy zjawiska otrzymuje się związek między modułem Younga E i strzałką s :

$$E = \frac{FL^3}{3sI_s}, \quad (\text{M12.2})$$

gdzie I_s jest powierzchniowym momentem bezwładności.

W ćwiczeniu do pomiaru modułu Younga zastosowano metodę opartą na analizie zginania podpartego na dwóch końcach pręta (rysunek M12.1). W tym przypadku efekt ugięcia, reprezentowany przez strzałkę ugięcia s , jest taki sam, jak dla pręta o długości $L/2$ zginanego siłą $F/2$. Uwzględniając ten fakt w zależności (M12.2), otrzymujemy następujący wzór:

$$E = \frac{FL^3}{48sI_s}. \quad (\text{M12.3})$$

Po obciążeniu pręta jego oś ulega odchyleniu o kąt φ . Odbity w zwierciadle promień lasera ulega odchyleniu o kąt 2φ , co odpowiada przesunięciu plamki świetlnej na skali o odcinek h . Dla małych kątów można przyjąć, że:

$$h = 2\varphi d, \quad (\text{M12.4})$$

gdzie d – odległość zwierciadła od skali. Zakładając, że obciążony pręt jest wygięty w kształcie wycinka okręgu, można pokazać, że jeśli $s \ll L$, zachodzi związek:

$$\varphi = \frac{4s}{L}. \quad (\text{M12.5})$$

Na podstawie wzorów (M12.3), (M12.4) i (M12.5) końcowa relacja przyjmuje postać:

$$E = \frac{FdL^2}{6hI_s}. \quad (\text{M12.6})$$

Badany pręt układamy na wspornikach **(2)** i **(3)** (rysunek M12.1). Zakładamy na jeden z końców pręta lustro **(6)**. Pręt i laser ustawiamy tak, aby promień po odbiciu od lusterka **(6)** trafił na skalę **(7)**. Podwieszając obciążenie **(4)** na środku pręta, mierzymy zmiany położenia h plamki na skali. Maksymalne obciążenia prętów występujących w doświadczeniu podaje tabela:

Materiał	Maksymalne obciążenie [kg]
stal	5
mosiądz	4
aluminium (przekrój pełny)	3
aluminium (przekrój pusty)	1,5
kompozyt	1

Tabela M12.1. Maksymalne obciążenia prętów

Zadania do wykonania

M12.1. Zmierzyć strzałki ugięcia jednego z prętów przy kilku różnych obciążeniach. Wykonać wykres $h = f(F)$ (zaznaczając niepewności pomiaru) i ocenić, czy występujące w czasie doświadczenia odkształcenia są z zakresu sprężystości. Metodą graficzną i/lub metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć moduł Younga badanego pręta.

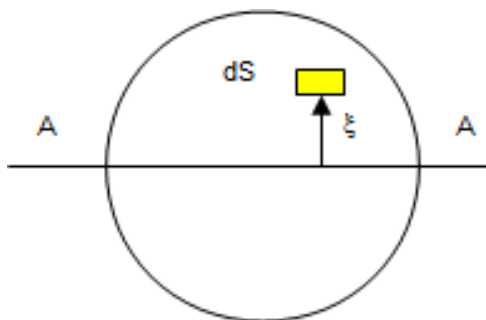
M12.2. Zmierzyć strzałki ugięcia prętów przy jednym obciążeniu (np. około 70%–80% obciążenia maksymalnego). Obliczyć wartość modułów Younga zbadanych prętów, określić wartość niepewności pomiaru i porównać wyniki z wartościami tablicowymi.

Uzupełnienie do zadania M12.1-M12.2

Powierzchniowy moment bezwładności I_s powierzchni S względem osi AA (rysunek M12.4) leżącej na tej powierzchni definiuje się jako:

$$I_s = \int \xi^2 dS, \quad (\text{M12.7})$$

gdzie dS – elementarna powierzchnia, ξ – odległość elementu dS od osi AA . Po-



Rysunek M12.4. Ilustracja pomocnicza do definicji powierzchniowego momentu bezwładności

wierzchniowy moment bezwładności zależy od wielkości i kształtu powierzchni S oraz od położenia osi. W przypadku, gdy oś ta przechodzi przez środek powierzchni kołowej:

$$I_s = \frac{\pi \Phi^4}{64}, \quad (\text{M12.8})$$

gdzie Φ jest średnicą koła. Dla przekroju kwadratowego, gdy oś AA przechodzi przez środek kwadratu i jest równoległa do jego boku, powierzchniowy moment bezwładności:

$$I_s = \frac{a^4}{12} \quad (\text{M12.9})$$

gdzie a jest bokiem kwadratu.

M12.5. Rachunek niepewności

Niepewność pomiaru poszczególnych pojedynczych wielkości mierzonych bezpośrednio należy oszacować w trakcie wykonywania pomiarów w oparciu o podziałki użytych przymiarów liniowych. Podana przez producenta dokładność wykonania odważników o masie m wynosi $0,005m$.

Niepewność wyznaczenia parametrów liniowej zależności $h = f(F)$ obliczmy korzystając z odpowiednich wzorów metody najmniejszych kwadratów.

Niepewność wyznaczenia modułu Younga obliczamy jako niepewność wielkości złożonej.