Ćwiczenie M13

Wyznaczanie modułu sztywności metodą Gaussa

M13.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości modułu sztywności stali metodą dynamiczną Gaussa.

M13.2. Zagadnienia związane z tematyką ćwiczenia

— Budowa wewnętrzna ciał stałych,
— właściwości sprężyste ciał stałych,
— mechanika punktu materialnego i bryły sztywnej.

M13.3. Literatura

[1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Podstawy fizyki, cz. 1*, PWN, Warszawa.
[2] Massalski J., Massalska M.: *Fizyka dla inżynierów, cz. 1*, WNT, Warszawa.
[3] Szczeniowski S.: *Fizyka doświadczalna, cz. 1*, PWN, Warszawa.
[4] *Metody wykonywania pomiarów i szacowania niepewności pomiarowych*, http://ftims.pg.edu.pl/documents/10673/20436990/wstep.pdf

M13.4. Przebieg ćwiczenia i zadania do wykonania

Układ doświadczalny

Rysunek M13.1 zdjęcie układu pomiarowego z zaznaczonymi elementami. W skład zestawu wchodzą: **1** – badany drut, **2** – wsporniki drutów, **3** – wspornik krzyżakowy pierścienia - obciążnika oscylatora, **4** – pierścień - obciążnik oscylatora, **5** – stoper, **6** – śruba mikrometryczna.

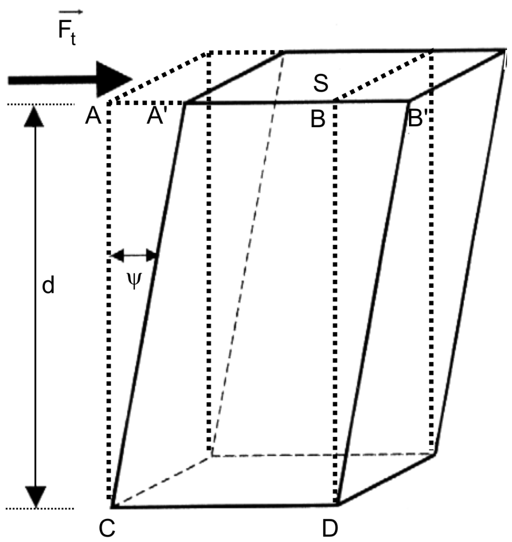
Rysunek M13.1. Zdjęcie układu pomiarowego

Przebieg doświadczenia

Moduł sztywności τ jest związany z tzw. odkształceniem przesunięcia prostego, które powstaje po przyłożeniu do ciała ścinającej siły stycznej.

Jeśli na ciało w kształcie prostopadłościanu działa siła $\vec{F_t}$, styczna do powierzchni górnej podstawy S, to następuje wzajemne przesuwanie się sąsiednich warstw i w rezultacie skręcenie płaszczyzn prostopadłych do S o pewien kąt Ψ (rysunek M13.2).

W skali mikroskopowej odkształcenie przesunięcia prostego tłumaczy się skrzywieniem komórek siatki krystalicznej. Jeśli w kierunku AB działa siła $\vec{F_t}$, wówczas komórka elementarna przekształca się np. z sześcianu w romboid, przy czym



Rysunek M13.2. Odkształcenie prostopadłościennego ciała pod wpływem działania siły stycznej

przekątna CB ulega wydłużeniu a AD skróceniu. Wskutek tego między atomami zadziałają siły przyciągania i odpychania, które po zaprzestaniu działania $\vec{F_t}$ pozwalają powrócić komórkom do położenia równowagi.

Sumowanie się elementarnych przesunięć zachodzących w sieci krystalicznej prowadzi do odkształcenia, przedstawionego na rysunku M13.2. Odcinek AA' jest bezwzględną wartością przesunięcia warstwy górnej AB w stosunku do dolnej CD, d – grubością warstwy, zatem dla niewielkich przesunięć:

$$\Psi \approx \operatorname{tg} \Psi = \frac{AA'}{d}. \tag{M13.1}$$

Wzór ten opisuje tzw. przesunięcie proste względne. W zakresie, w którym jest słuszne prawo Hooke'a, odkształcenie względne jest proporcjonalne do naprężenia stycznego:

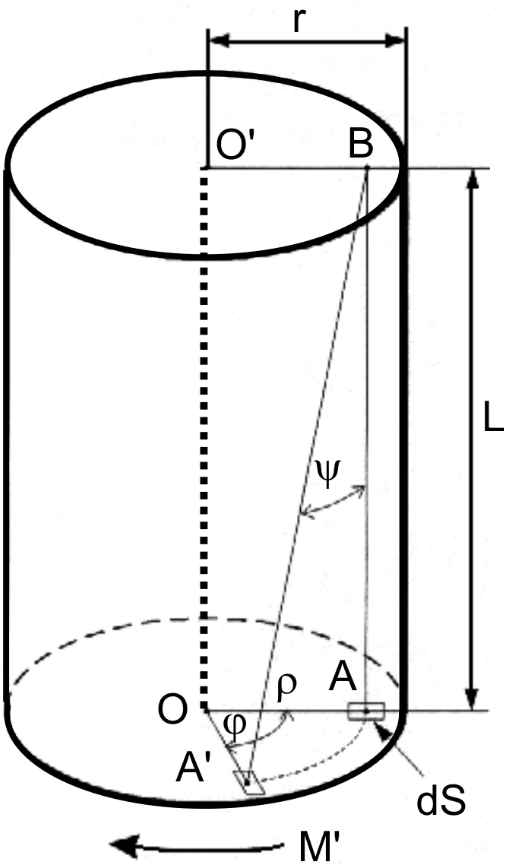
$$p_t = \frac{F_t}{S}, \tag{M13.2}$$

co można zapisać w postaci

$$p_t = \tau \Psi, \tag{M13.3}$$

gdzie τ jest wielkością stałą, zależną od rodzaju materiału i nosi nazwę modułu sztywności lub ścinania. Związek (M13.3) jest równaniem definicyjnym modułu sztywności τ.

Z odkształceniem przesunięcia prostego ściśle jest związany inny rodzaj odkształcenia, zwany skręceniem. Weźmy pod uwagę długi pręt o przekroju kołowym, niech jego promień wynosi r, a długość L (rysunek M13.3). Przypuśćmy,



Rysunek M13.3. Skręcenie pręta

że górny koniec pręta jest zamocowany nieruchomo, zaś do jego dolnego końca przyłożony jest zewnętrzny moment siły M'. Wybierzmy element dV pręta o powierzchni dS i długości L, znajdujący się w odległości ρ od osi pręta OO'. Pod wpływem momentu siły M' pręt ulega skręceniu o kąt φ, tzn. dla wybranego elementu dV powierzchnia dS przesuwa się z położenia A do położenia A', a krawędzie równoległe do BA zajmują położenie równoległe do BA'. To oznacza, że element dV ulega względnemu przesunięciu prostemu:

$$\Psi = \frac{AA'}{L}. \tag{M13.4}$$

Ponieważ $AA' = \varphi\rho$, ze wzoru (M13.3) wynika, że naprężenie styczne działające na element powierzchni dS wynosi:

$$p_t = \frac{\tau\varphi\rho}{L}, \tag{M13.5}$$

co odpowiada elementarnemu momentowi siły:

$$\mathrm{d}M' = \frac{\tau\varphi}{L}\rho^2\mathrm{d}S. \tag{M13.6}$$

Całkowity moment M' otrzymuje się, całkując wyrażenie (M13.6) po całym polu przekroju o promieniu r:

$$M' = \frac{\tau\varphi}{L}\int_S \rho^2\mathrm{d}S, \tag{M13.7}$$

gdzie

$$I_s = \int_S \rho^2\mathrm{d}S, \tag{M13.8}$$

stanowi tzw. powierzchniowy moment bezwładności pręta (względem osi $O'O$). Wzór (M13.7) można zapisać w postaci:

$$M' = K\varphi, \tag{M13.9}$$

gdzie wielkość

$$K = \frac{\tau I_s}{L} \tag{M13.10}$$

nosi nazwę momentu kierującego danego pręta.

Przy skręceniu pręta o kąt φ (spowodowanym przyłożeniem zewnętrznego momentu siły M') pojawia się wewnętrzny moment siły M, równy co do wartości M', lecz przeciwnie skierowany, tzn. $M = -M'$. Jeżeli dolny koniec pręta zostanie obciążony ciałem o kształcie symetrycznym względem osi pręta, to swobodny ruch skrętny tego ciała w płaszczyźnie prostopadłej do wspólnej osi symetrii (ciała i pręta) jest opisany, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, równaniem:

$$M = I\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}, \tag{M13.11}$$

w którym I jest momentem bezwładności ciała względem osi symetrii. Biorąc pod uwagę, że $M = -K\varphi$ równanie (M13.11) daje się przedstawić w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{I}\varphi = 0. \tag{M13.12}$$

Równanie to określa ruch drgający prosty o częstości:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \tag{M13.13}$$

a więc o okresie drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}. \tag{M13.14}$$

Jak widać, mierząc okres drgań skrętnych ciała zawieszonego na pręcie oraz uwzględniając zależność (M13.10), można wyznaczyć moduł sztywności materiału, z którego wykonany jest pręt.

W ciele stałym pod wpływem zewnętrznych sił mogą się pojawić miejscowe naprężenia mające charakter elementarnych odkształceń przesunięcia prostego. Sprężyste oddziaływania międzyatomowe prowadzą wtedy do powstania w nim fal poprzecznych, których prędkość rozchodzenia się v jest ściśle związana z modułem sztywności τ i jest opisana wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_c}} \tag{M13.15}$$

gdzie ρ_c jest gęstością ciała stałego.

Wyznaczenie modułu sztywności τ metodą dynamiczną Gaussa polega na pomiarze okresów drgań wibratora nieobciążonego (T_0) oraz wibratora obciążonego ciałem o prostych kształtach geometrycznych (T_i). Na ogół jest sprawą kłopotliwą wyznaczenie momentu bezwładności wibratora z uwagi na jego kształt, zamocowania itd., dlatego w metodzie dynamicznej postępuje się tak, by moment bezwładności wibratora nieobciążonego I_0 nie występował we wzorze na τ. Okres drgań opisany zależnością (M13.14) wynosi dla wibratora nieobciążonego:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{K}}. \tag{M13.16}$$

oraz dla wibratora obciążonego ciałem o znanym momencie bezwładności I_i:

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_i}{K}}. \tag{M13.17}$$

Z równań (M13.16) i (M13.17) po elementarnych przekształceniach otrzymuje się:

$$K = 4\pi^2 \frac{I_i}{T_i^2 - T_0^2}, \tag{M13.18}$$

a po uwzględnieniu zależności (M13.10):

$$\tau = 4\pi^2 \frac{L I_i}{I_s \left(T_i^2 - T_0^2\right)}. \tag{M13.19}$$

W pracowni pomiary wyznaczenia modułu sztywności przeprowadza się dla drutów o przekroju kołowym, dla których powierzchniowy moment bezwładności:

$$I_s = \frac{\pi d^4}{32}, \tag{M13.20}$$

zaś ciałem o prostych kształtach geometrycznych jest obręcz, której moment bezwładności:

$$I_i = \frac{1}{8} m_i \left(D_1^2 + D_2^2\right), \tag{M13.21}$$

gdzie m_i jest masą obręczy, D_1 i D_2 – wewnętrzną i zewnętrzną średnicą obręczy.

Wartość τ oblicza się ze wzoru (M13.19) po uwzględnieniu zależności (M13.20) i (M13.21). Ostatecznie otrzymuje się:

$$\tau = 16\pi \frac{m_i L}{d^4} \frac{\left(D_1^2 + D_2^2\right)}{\left(T_i^2 - T_0^2\right)}. \tag{M13.22}$$

Zadania do wykonania

- M13.1. Za pomocą śruby mikrometrycznej wykonać pomiary długości i średnicy danych drutów– pomiary powtórzyć kilkakrotnie.
- M13.2. Zmierzyć średnice wewnętrzną i zewnętrzną dwu obręczy.
- M13.3. Wyznaczyć okresy drgań: T_0 – wibratora nieobciążonego oraz T_1 i T_2 – wibratora obciążonego.
- M13.4. Obliczyć wartość modułu sztywności materiału drutu dla różnych obciążeń wibratora. Do obliczeń przyjąć wartości średnie wyników pomiarowych otrzymanych w zadaniach M13.1 - M13.3.
- M13.5. Określić niepewność standardową pomiaru modułu sztywności.
- M13.6. Obliczyć prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w drucie i ocenić dokładność jej wyznaczenia.

M13.5. Rachunek niepewności

W celu wyznaczenia wartości modułu sztywności τ są wykonywane następujące pomiary: długości drutu L (między śrubkami mocującymi), jego średnicy d, średnic obręczy D_1 i D_2, oraz okresów drgań skrętnych wibratora T_0 i T_i. Niepewności pomiarowe poszczególnych wielkości określamy na podstawie podziałek i klasy użytych przyrządów pomiarowych. Przy wielokrotnie powtarzanych pomiarach należy wyznaczyć odchylenie standardowe od wartości średniej.

Niepewność wyznaczenie wartości τ szacujemy jako niepewność wielkości złożonej.