

Ćwiczenie M15

Modelowanie (symulacja) procesów stochastycznych

M15.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest badanie procesu stochastycznego z wykorzystaniem tzw. deski Galtona.

M15.2. Zagadnienia związane z tematyką ćwiczenia

- Pojęcie procesu stochastycznego,
- występowanie rozkładów stochastycznych w przyrodzie,
- pojęcie prawdopodobieństwa,
- zdarzenia niezależne,
- twierdzenie o prawdopodobieństwie iloczynu zdarzeń niezależnych,
- rozkład normalny zmiennej losowej,
- rozkład dwumianowy,
- parametry rozkładu normalnego i dwumianowego,
- krzywa Gaussa.

M15.3. Literatura

- [1] Wróblewski A.K., Zakrzewski A.J.: *Wstęp do fizyki*, PWN, Warszawa.
- [2] Szydłowski H.: *Teoria pomiarów*, PWN, Warszawa.
- [3] *Metody wykonywania pomiarów i szacowania niepewności pomiarowych*, http://www.mif.pg.gda.pl/index.php?node=mat_dla_stud_v2

M15.4. Przebieg ćwiczenia i zadania do wykonania

Układ doświadczalny

Rysunek M15.1 przedstawia zdjęcie układu pomiarowego, tzw. deski Galtona.



Rysunek M15.1. Zdjęcie układu pomiarowego

Przebieg doświadczenia

Przed przystąpieniem do pomiarów należy przechylić deskę i przesypać wszystkie kulki do lejka zsypowego. Następnie badamy rozkład pierwszej serii 100 kulek, uwalniając kolejno kulkę za kulką. Zliczamy kulki w poszczególnych przegródkach (rowkach) deski, a wyniki zapisujemy w tabeli sporządzonej według wzoru (tabela M15.4). Powtarzamy cykl pomiarów dla następnych serii po 100 kulek każda, zwiększając w ten sposób całkowitą liczbę kulek do 200 w drugim i 300 w trzecim pomiarze. Wyniki zapisujemy w odpowiednich wierszach tabeli. W przedstawionej tabeli ν jest całkowitą liczbą kulek w kolejnym pomiarze (100, 200, 300), ν_n liczbą kulek w n -tym rowku ($n = 1, 2, 3, \dots, N$), $N = 23$ jest całkowitą liczbą rowków deski Galtona.

ν	n	1	2	3	4	5	6	N=23
100	ν_n									
	$P_{\text{exp}}(n)$									
200	ν_n									
	$P_{\text{exp}}(n)$									
300	ν_n									
	$P_{\text{exp}}(n)$									

Tabela M15.1. Wzór tabelki pomiarowej

Zadania do wykonania

M15.1. Wyznaczyć eksperymentalne wartości prawdopodobieństwa wpadnięcia kulki do n -tego rowka dla serii $\nu = 100, 200, 300$ kulek.

M15.2. Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P(n)$ wpadnięcia kulki do n -tego rowka na podstawie rozkładu normalnego dla $\nu = 300$ kulek.

M15.3. Wykreślić otrzymane w doświadczeniu rozkłady dla całkowitej liczby $\nu = 100, 200, 300$ kulek. Na ten sam wykres nanieść rozkład Gaussa dla $\nu = 300$ kulek, wyliczony w punkcie M15.2.

M15.4. Obliczyć względną liczbę kulek, które znalazły się w rowkach deski zawartych w przedziale $\bar{n} \pm \sigma$ dla całkowitej liczby 300 kulek.

Uzupełnienie do zadania M15.1

Korzystając z zależności:

$$P_{\text{exp}}(n) = \frac{\nu_n}{\nu} \quad (\text{M15.1})$$

dla trzech serii pomiarów obliczamy doświadczalne prawdopodobieństwa wpadnięcia kulki do n -tego rowka.

Uzupełnienie do zadania M15.2

Obliczamy estymaty zmiennej losowej \bar{n} i odchylenia standardowego σ rozkładu Gaussa:

$$\bar{n}_\nu = \sum_{n=1}^N \frac{n\nu_n}{\nu}, \quad \sigma_\nu = \left(\sum_{n=1}^N \frac{(n - \bar{n}_\nu)^2 \nu_n}{\nu - 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{M15.2})$$

Następnie wyznaczamy gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego na podstawie wzoru:

$$\varphi(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (\text{M15.3})$$

Korzystając z wyznaczonych wielkości, obliczamy prawdopodobieństwo $P(n)$ wpadnięcia kulki do n -tego rowka:

$$P(n) = \int_n \varphi(n) dn = \varphi(n) \cdot \Delta n, \quad (\text{M15.4})$$

gdzie $\Delta n = 1$.

Uzupełnienie do zadania M15.3

Sporządzić wykres słupkowy rozkładu normalnego dla trzech serii pomiarów ($n = 100, 200, 300$), wykorzystując wartości $P_{exp}(n)$ zawarte w tabeli. Na ten sam wykres nanieść punkty wyliczone ze wzoru (M15.4) na rozkład Gaussa – odpowiednie wartości $P(n)$ zawarte są w ostatnim wierszu tabeli.

Uzupełnienie do zadania M15.4

Obliczyć względną liczbę kulek, które znalazły się w rowkach deski Galtona, w przedziale $\bar{n} \pm \sigma$ i porównać wynik z teoretyczną wartością prawdopodobieństwa znalezienia się kulek w rowkach z tego samego przedziału, wynikającą z rozkładu Gaussa.

M15.5. Rachunek niepewności

Deska Galtona jest swego rodzaju analogiem przyrządu pomiarowego, którego najmniejsza działka jest szerokością rowka, równą dokładnie odległości między środkami kółek w każdym rzędzie. Ruch kulki jest symulacją procesu pomiaru, a wynik pomiaru to wartość zmiennej losowej n (numer rowka, do którego ostatecznie trafi kulka). Zatem odchylenie standardowe σ jest miarą niepewności pojedynczego pomiaru (kulka doznaje zawsze elementarnego poziomego przemieszczenia po zderzeniu z kółkiem – w pomiarze zawsze występują niepewności przypadkowe). Odchylenie standardowe σ w teorii błędów nazywa się błędem średnim kwadratowym pojedynczego pomiaru. Należy pamiętać, że zmienna losowa n przyjmuje wartości dyskretne, zatem estymaty zmiennej losowej n i odchylenia standardowego σ są liczbami całkowitymi! Wyniki obliczeń wartości prawdopodobieństw $P_{exp}(n)$ i $P(n)$ podać z dokładnością do trzech cyfr znaczących.