

## Ćwiczenie M13

# Wyznaczanie modułu sztywności metodą Gaussa

### M13.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości modułu sztywności stali metodą dynamiczną Gaussa.

### M13.2. Zagadnienia związane z tematyką ćwiczenia

- Budowa wewnętrzna ciał stałych,
- właściwości sprężyste ciał stałych,
- mechanika punktu materialnego i bryły sztywnej.

### M13.3. Literatura

- [1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Podstawy fizyki, cz. 1*, PWN, Warszawa.
- [2] Massalski J., Massalska M.: *Fizyka dla inżynierów, cz. 1*, WNT, Warszawa.
- [3] Szczeniowski S.: *Fizyka doświadczalna, cz. 1*, PWN, Warszawa.
- [4] *Metody wykonywania pomiarów i szacowania niepewności pomiarowych*, [http://www.mif.pg.gda.pl/index.php?node=mat\\_dla\\_stud\\_v2](http://www.mif.pg.gda.pl/index.php?node=mat_dla_stud_v2)

### M13.4. Przebieg ćwiczenia i zadania do wykonania

#### Układ doświadczalny

Rysunek M13.1 zdjęcie układu pomiarowego z zaznaczonymi elementami. W skład zestawu wchodzi: **1** – badany drut, **2** – wsporniki drutów, **3** – wspornik krzyżakowy pierścienia - obciążnika oscylatora, **4** – pierścień - obciążnik oscylatora, **5** – stoper, **6** – śruba mikrometryczna.



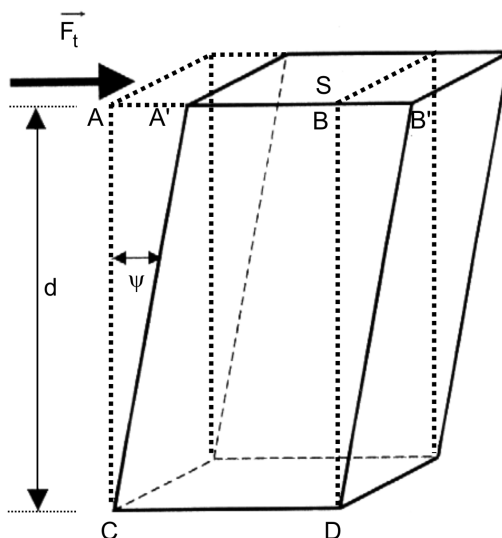
Rysunek M13.1. Zdjęcie układu pomiarowego

### Przebieg doświadczenia

Moduł sztywności  $\tau$  jest związany z tzw. odkształceniem przesunięcia prostego, które powstaje po przyłożeniu do ciała ścinającej siły stycznej.

Jeśli na ciało w kształcie prostopadłościanu działa siła  $\vec{F}_t$ , styczna do powierzchni górnej podstawy  $S$ , to następuje wzajemne przesuwanie się sąsiednich warstw i w rezultacie skrócenie płaszczyzn prostopadłych do  $S$  o pewien kąt  $\Psi$  (rysunek M13.2).

W skali mikroskopowej odkształcenie przesunięcia prostego tłumaczy się skrzywieniem komórek siatki krystalicznej. Jeśli w kierunku  $AB$  działa siła  $\vec{F}_t$ , wówczas komórka elementarna przekształca się np. z sześcianu w romboid, przy czym



Rysunek M13.2. Odształcenie prostokątnego ciała pod wpływem działania siły stycznej

przekątna  $CB$  ulega wydłużeniu a  $AD$  skróceniu. Wskutek tego między atomami zadziałają siły przyciągania i odpychania, które po zaprzestaniu działania  $\vec{F}_t$  pozwalają powrócić komórkom do położenia równowagi.

Sumowanie się elementarnych przesunięć zachodzących w sieci krystalicznej prowadzi do odształcenia, przedstawionego na rysunku M13.2. Odcinek  $AA'$  jest bezwzględną wartością przesunięcia warstwy górnej  $AB$  w stosunku do dolnej  $CD$ ,  $d$  – grubością warstwy, zatem dla niewielkich przesunięć:

$$\Psi \approx \text{tg } \Psi = \frac{AA'}{d}. \quad (\text{M13.1})$$

Wzór ten opisuje tzw. przesunięcie proste względne. W zakresie, w którym jest słuszne prawo Hooke'a, odształcenie względne jest proporcjonalne do naprężenia stycznego:

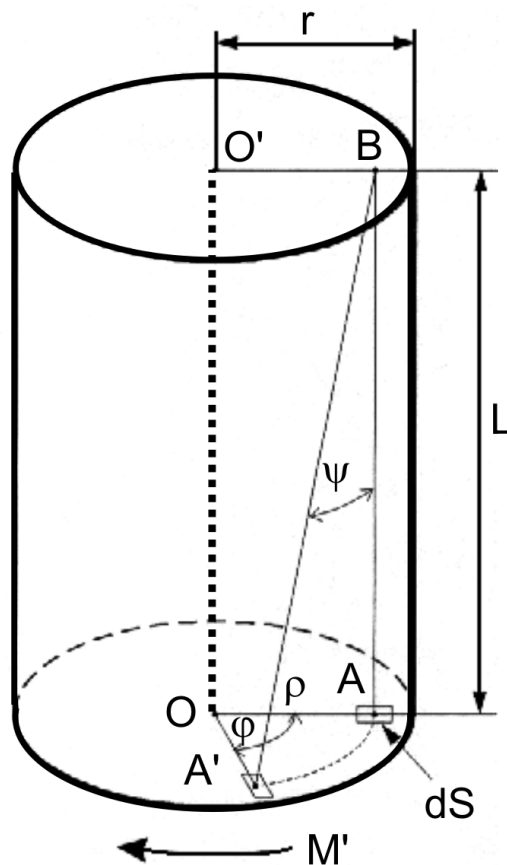
$$p_t = \frac{F_t}{S}, \quad (\text{M13.2})$$

co można zapisać w postaci

$$p_t = \tau \Psi, \quad (\text{M13.3})$$

gdzie  $\tau$  jest wielkością stałą, zależną od rodzaju materiału i nosi nazwę modułu sztywności lub ścinania. Związek (M13.3) jest równaniem definicyjnym modułu sztywności  $\tau$ .

Z odkształceniem przesunięcia prostego ściśle jest związany inny rodzaj odkształcenia, zwany skręceniem. Weźmy pod uwagę długi pręt o przekroju kołowym, niech jego promień wynosi  $r$ , a długość  $L$  (rysunek M13.3). Przypuśćmy,



Rysunek M13.3. Skręcenie pręta

że górny koniec pręta jest zamocowany nieruchomo, zaś do jego dolnego końca przyłożony jest zewnętrzny moment siły  $M'$ . Wybierzmy element  $dV$  pręta o powierzchni  $dS$  i długości  $L$ , znajdujący się w odległości  $\rho$  od osi pręta  $OO'$ . Pod wpływem momentu siły  $M'$  pręt ulega skręceniu o kąt  $\varphi$ , tzn. dla wybranego elementu  $dV$  powierzchnia  $dS$  przesuwa się z położenia  $A$  do położenia  $A'$ , a

krawędzie równoległe do  $BA$  zajmują położenie równoległe do  $BA'$ . To oznacza, że element  $dV$  ulega względnemu przesunięciu prostemu:

$$\Psi = \frac{AA'}{L}. \quad (\text{M13.4})$$

Ponieważ  $AA' = \varphi\rho$ , ze wzoru (M13.3) wynika, że naprężenie styczne działające na element powierzchni  $dS$  wynosi:

$$p_t = \frac{\tau\varphi\rho}{L}, \quad (\text{M13.5})$$

co odpowiada elementarnemu momentowi siły:

$$dM' = \frac{\tau\varphi}{L}\rho^2 dS. \quad (\text{M13.6})$$

Całkowity moment  $M'$  otrzymuje się, całkując wyrażenie (M13.6) po całym polu przekroju o promieniu  $r$ :

$$M' = \frac{\tau\varphi}{L} \int_S \rho^2 dS, \quad (\text{M13.7})$$

gdzie

$$I_s = \int_S \rho^2 dS, \quad (\text{M13.8})$$

stanowi tzw. powierzchniowy moment bezwładności pręta (względem osi  $O'O$ ). Wzór (M13.7) można zapisać w postaci:

$$M' = K\varphi, \quad (\text{M13.9})$$

gdzie wielkość

$$K = \frac{\tau I_s}{L} \quad (\text{M13.10})$$

nosi nazwę momentu kierującego danego pręta.

Przy skręceniu pręta o kąt  $\varphi$  (spowodowanym przyłożeniem zewnętrznego momentu siły  $M'$ ) pojawia się wewnętrzny moment siły  $M$ , równy co do wartości  $M'$ , lecz przeciwnie skierowany, tzn.  $M = -M'$ . Jeżeli dolny koniec pręta zostanie obciążony ciałem o kształcie symetrycznym względem osi pręta, to swobodny ruch skrętny tego ciała w płaszczyźnie prostopadłej do wspólnej osi symetrii (ciała i pręta) jest opisany, zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona, równaniem:

$$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (\text{M13.11})$$

w którym  $I$  jest momentem bezwładności ciała względem osi symetrii. Biorąc pod uwagę, że  $M = -K\varphi$  równanie (M13.11) daje się przedstawić w postaci:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{K}{I}\varphi = 0. \quad (\text{M13.12})$$

Równanie to określa ruch drgający prosty o częstotliwości:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}} \quad (\text{M13.13})$$

a więc o okresie drgań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}. \quad (\text{M13.14})$$

Jak widać, mierząc okres drgań skrętnych ciała zawieszonoego na pręcie oraz uwzględniając zależność (M13.10), można wyznaczyć moduł sztywności materiału, z którego wykonany jest pręt.

W ciele stałym pod wpływem zewnętrznych sił mogą się pojawić miejscowe naprężenia mające charakter elementarnych odkształceń przesunięcia prostego. Sprężyste oddziaływania międzyatomowe prowadzą wtedy do powstania w nim fal poprzecznych, których prędkość rozchodzenia się  $v$  jest ściśle związana z modułem sztywności  $\tau$  i jest opisana wzorem:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_c}} \quad (\text{M13.15})$$

gdzie  $\rho_c$  jest gęstością ciała stałego.

Wyznaczenie modułu sztywności  $\tau$  metodą dynamiczną Gaussa polega na pomiarze okresów drgań wibratora nieobciążonego ( $T_0$ ) oraz wibratora obciążonego ciałem o prostych kształtach geometrycznych ( $T_i$ ). Na ogół jest sprawą kłopotliwą wyznaczenie momentu bezwładności wibratora z uwagi na jego kształt, zamocowania itd., dlatego w metodzie dynamicznej postępuje się tak, by moment bezwładności wibratora nieobciążonego  $I_0$  nie występował we wzorze na  $\tau$ . Okres drgań opisany zależnością (M13.14) wynosi dla wibratora nieobciążonego:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{K}}. \quad (\text{M13.16})$$

oraz dla wibratora obciążonego ciałem o znanym momencie bezwładności  $I_i$ :

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_i}{K}}. \quad (\text{M13.17})$$

Z równań (M13.16) i (M13.17) po elementarnych przekształceniach otrzymuje się:

$$K = 4\pi^2 \frac{I_i}{T_i^2 - T_0^2}, \quad (\text{M13.18})$$

a po uwzględnieniu zależności (M13.10):

$$\tau = 4\pi^2 \frac{LI_i}{I_s (T_i^2 - T_0^2)}. \quad (\text{M13.19})$$

W pracowni pomiary wyznaczenia modułu sztywności przeprowadza się dla drutów o przekroju kołowym, dla których powierzchniowy moment bezwładności:

$$I_s = \frac{\pi d^4}{32}, \quad (\text{M13.20})$$

zaś ciałem o prostych kształtach geometrycznych jest obręcz, której moment bezwładności:

$$I_i = \frac{1}{8} m_i (D_1^2 + D_2^2), \quad (\text{M13.21})$$

gdzie  $m_i$  jest masą obręczy,  $D_1$  i  $D_2$  – wewnętrzną i zewnętrzną średnicą obręczy.

Wartość  $\tau$  oblicza się ze wzoru (M13.19) po uwzględnieniu zależności (M13.20) i (M13.21). Ostatecznie otrzymuje się:

$$\tau = 16\pi \frac{m_i L (D_1^2 + D_2^2)}{d^4 (T_i^2 - T_0^2)}. \quad (\text{M13.22})$$

### Zadania do wykonania

- M13.1. Za pomocą śruby mikrometrycznej wykonać pomiary długości i średnicy danych drutów – pomiary powtórzyć kilkakrotnie.
- M13.2. Zmierzyć średnice wewnętrzną i zewnętrzną dwu obręczy.
- M13.3. Wyznaczyć okresy drgań:  $T_0$  – wibratora nieobciążonego oraz  $T_1$  i  $T_2$  – wibratora obciążonego.
- M13.4. Obliczyć wartość modułu sztywności materiału drutu dla różnych obciążeń wibratora. Do obliczeń przyjąć wartości średnie wyników pomiarowych otrzymanych w zadaniach M13.1 - M13.3.
- M13.5. Określić niepewność standardową pomiaru modułu sztywności.
- M13.6. Obliczyć prędkość rozchodzenia się fali poprzecznej w drucie i ocenić dokładność jej wyznaczenia.

**M13.5. Rachunek niepewności**

W celu wyznaczenia wartości modułu sztywności  $\tau$  są wykonywane następujące pomiary: długości drutu  $L$  (między śrubkami mocującymi), jego średnicy  $d$ , średnic obręczy  $D_1$  i  $D_2$ , oraz okresów drgań skrętnych wibratora  $T_0$  i  $T_i$ . Niepewności pomiarowe poszczególnych wielkości określamy na podstawie podziałek i klasy użytych przyrządów pomiarowych. Przy wielokrotnie powtarzanych pomiarach należy wyznaczyć odchylenie standardowe od wartości średniej.

Niepewność wyznaczenie wartości  $\tau$  szacujemy jako niepewność wielkości złożonej.