Ćwiczenie M12

Wyznaczanie modułu Younga metodą strzałki ugięcia

M12.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie wartości modułu Younga różnych materiałów poprzez badanie strzałki ugięcia wykonanych z nich prętów.

M12.2. Zagadnienia związane z tematyką ćwiczenia

— Budowa wewnętrzna ciał stałych,
— właściwości mechaniczne ciał stałych,
— mechanika punktu materialnego i bryły sztywnej,
— metoda najmniejszych kwadratów.

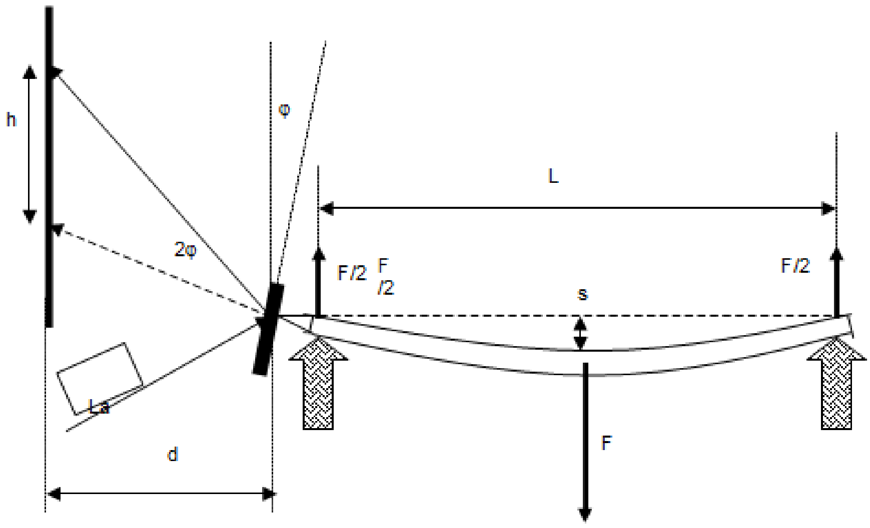
M12.3. Literatura

[1] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Podstawy fizyki, cz. 1*, PWN, Warszawa.
[2] Massalski J., Massalska M.: *Fizyka dla inżynierów, cz. 1*, WNT, Warszawa.
[3] Szczeniowski S.: *Fizyka doświadczalna, cz. 1*, PWN, Warszawa.
[4] *Metody wykonywania pomiarów i szacowania niepewności pomiarowych*, http://www.mif.pg.gda.pl/index.php?node=mat_dla_stud_v2

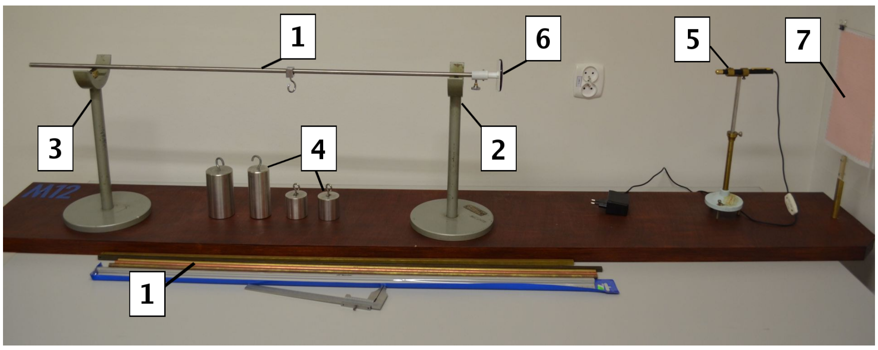
M12.4. Przebieg ćwiczenia i zadania do wykonania

Układ doświadczalny

Rysunek M12.1 przedstawia schemat układu pomiarowego, zaś rysunek M12.2 zdjęcie układu z zaznaczonymi na schemacie elementami. W skład zestawu wchodzą: **1** – badany pręt, **2,3** – wsporniki pręta, **4** – odważnik, **5** – laser z zasilaczem sieciowym, **6** – zwierciadło, **7** – podziałka.



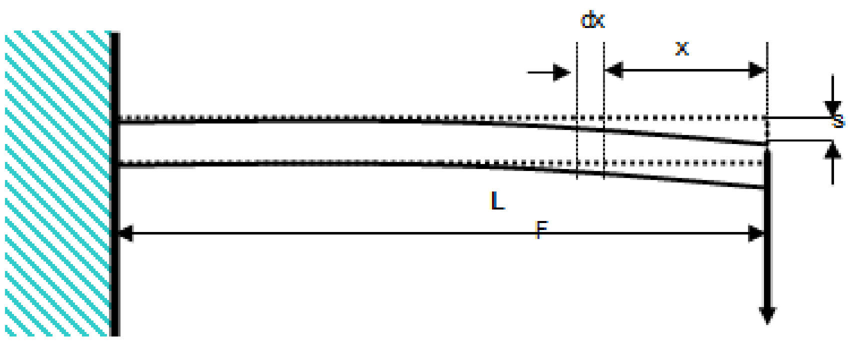
Rysunek M12.1. Schemat układu pomiarowego



Rysunek M12.2. Zdjęcie układu pomiarowego

Przebieg doświadczenia

Najprostszy sposób wyznaczania modułu Younga polega na pomiarze przyrostu ΔL pręta o długości L, umocowanego na jednym końcu i rozciąganego (lub ściskanego) przyłożoną do drugiego końca siłą F_n. Ten sposób jest stosowany w przypadku długich i cienkich prętów. Do pomiarów prętów grubych tej metody nie można stosować ze względu na konieczność użycia bardzo dużych sił w celu uzyskania mierzalnych wydłużeń. Dlatego w przypadku grubych prętów korzysta się z efektu zginania (rysunek M12.3).



Rysunek M12.3. Odkształcenie pręta podczas jego zginania

Zginanie jest odkształceniem o charakterze złożonym, a jego miarą jest strzałka ugięcia s. Jeżeli sztywno zamocowany na jednym końcu pręt poddany jest działaniu siły F działającej prostopadle do osi pręta na drugim jego końcu, wówczas na każdy poprzeczny element o grubości dx działa moment siły dany wzorem:

$$M_x = Fx, \tag{M12.1}$$

w którym x – odległość elementu dx od punktu przyłożenia siły F. Pod wpływem tego momentu siły element dx ulega odkształceniu, tak że górne jego warstwy ulegają wydłużeniu, natomiast dolne skróceniu. Całkowity efekt zginania, którego miarą jest strzałka ugięcia s, jest wypadkową opisanych powyżej efektów. Strzałka ugięcia s jest to przesunięcie końca pręta wywołane działaniem siły F. W wyniku szczegółowej analizy zjawiska otrzymuje się związek między modułem Younga E i strzałką s:

$$E = \frac{FL^3}{3sI_s}, \tag{M12.2}$$

gdzie I_s jest powierzchniowym momentem bezwładności.

W ćwiczeniu do pomiaru modułu Younga zastosowano metodę opartą na analizie zginania podpartego na dwóch końcach pręta (rysunek M12.1). W tym przypadku efekt ugięcia, reprezentowany przez strzałkę ugięcia s, jest taki sam, jak dla pręta o długości $L/2$ zginanego siłą $F/2$. Uwzględniając ten fakt w zależności (M12.2), otrzymujemy następujący wzór:

$$E = \frac{FL^3}{48sI_s}. \tag{M12.3}$$

Po obciążeniu pręta jego oś ulega odchyleniu o kąt φ. Odbity w zwierciadle promień lasera ulega odchyleniu o kąt 2φ, co odpowiada przesunięciu plamki świetlnej na skali o odcinek h. Dla małych kątów można przyjąć, że:

$$h = 2\varphi d, \tag{M12.4}$$

gdzie d – odległość zwierciadła od skali. Zakładając, że obciążony pręt jest wygięty w kształcie wycinka okręgu, można pokazać, że jeśli $s \ll L$, zachodzi związek:

$$\varphi = \frac{4s}{L}. \tag{M12.5}$$

Na podstawie wzorów (M12.3), (M12.4) i (M12.5) końcowa relacja przyjmuje postać:

$$E = \frac{FdL^2}{6hI_s}. \tag{M12.6}$$

Badany pręt układamy na wspornikach (**2**) i (**3**) (rysunek M12.1). Zakładamy na jeden z końców pręta lusterko (**6**). Pręt i laser ustawiamy tak, aby promień po odbiciu od lusterka (**6**) trafił na skalę (**7**). Podwieszając obciążenie (**4**) na środku pręta, mierzymy zmiany położenia h plamki na skali. Maksymalne obciążenia prętów występujących w doświadczeniu podaje tabela:

Materiał	Maksymalne obciążenie [kg]
stal	5
mosiądz	4
aluminium (przekrój pełny)	3
aluminium (przekrój pusty)	1,5
kompozyt	1

Tabela M12.1. Maksymalne obciążenia prętów

Zadania do wykonania

M12.1. Zmierzyć strzałki ugięcia jednego z prętów przy kilku różnych obciążeniach. Wykonać wykres $h = f(F)$ (zaznaczając niepewności pomiaru) i ocenić, czy występujące w czasie doświadczenia odkształcenia są z zakresu sprężystości. Metodą graficzna i/lub metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć moduł Younga badanego pręta.

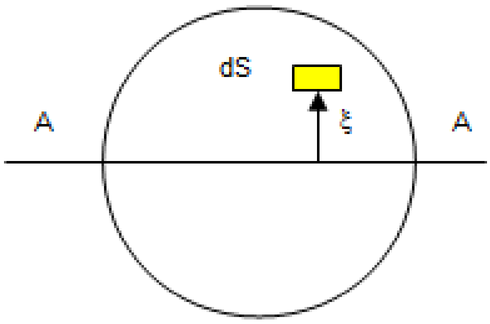
M12.2. Zmierzyć strzałki ugięcia prętów przy jednym obciążeniu (np. około 70%–80% obciążenia maksymalnego). Obliczyć wartość modułów Younga zbadanych prętów, określić wartość niepewności pomiaru i porównać wyniki z wartościami tablicowymi.

Uzupełnienie do zadania M12.1-M12.2

Powierzchniowy moment bezwładności I_s powierzchni S względem osi AA (rysunek M12.4) leżącej na tej powierzchni definiuje się jako:

$$I_s = \int \xi^2 \mathrm{d}S, \tag{M12.7}$$

gdzie dS – elementarna powierzchnia,ξ – odległość elementu dS od osi AA. Powierzchniowy moment bezwładności zależy od wielkości i kształtu powierzchni



Rysunek M12.4. Ilustracja pomocnicza do definicji powierzchniowego momentu bezwładności

S oraz od położenia osi. W przypadku, gdy oś ta przechodzi przez środek powierzchni kołowej:

$$I_s = \frac{\pi\Phi^4}{64}, \tag{M12.8}$$

gdzie Φ jest średnicą koła. Dla przekroju kwadratowego, gdy oś AA przechodzi przez środek kwadratu i jest równoległa do jego boku, powierzchniowy moment bezwładności:

$$I_s = \frac{a^4}{12} \tag{M12.9}$$

gdzie a jest bokiem kwadratu.

M12.5. Rachunek niepewności

Niepewność pomiaru poszczególnych pojedynczych wielkości mierzonych bezpośrednio należy oszacować w trakcie wykonywania pomiarów w oparciu o podziałki użytych przymiarów liniowych. Podana przez producenta dokładność wykonania odważników o masie m wynosi $0,005m$.

Niepewność wyznaczenia parametrów liniowej zależności $h = f(F)$ obliczmy korzystając z odpowiednich wzorów metody najmniejszych kwadratów.

Niepewność wyznaczenia modułu Younga obliczamy jako niepewność wielkości złożonej.