

## WSTĘP

# METODY OPRACOWANIA I ANALIZY WYNIKÓW POMIARÓW

U podstaw wszystkich nauk przyrodniczych leży zasada: sprawdzianem wszelkiej wiedzy jest eksperyment, tzn. jedyną miarą prawdy naukowej jest doświadczenie. Fizyka, to nauka przede wszystkim empiryczna. Pierwszym krokiem do ustalenia prawa fizycznego jest obserwacja zjawiska. Dla ustalenia i wyjaśnienia prawidłowości fizycznej należy wydzielić z wielu pobocznych wpływów najbardziej charakterystyczne, powtarzalne związki przyczynowe, co osiąga się w celowo ustawionym doświadczeniu. Dla otrzymania ilościowych wzajemnych zależności trzeba ustalić odpowiednie wielkości fizyczne, które można mierzyć. Definicje wielkości fizycznych muszą więc zawierać przepis na ich pomiar. Wiadą stąd szczególną rolę eksperymentu i pomiarów.

Laboratorium z fizyki ma na celu zaznajomienie studentów z podstawowymi przyrządami i metodami pomiarowymi oraz praktyczne zapoznanie z niektórymi zjawiskami i prawami przyrody – toteż w wielu przypadkach doświadczenie będzie służyło sprawdzeniu znanego już prawa fizycznego.

Należy sobie zdawać sprawę z faktu, że każde prawo fizyczne ustalone na podstawie pomiarów jest wyidealizowaną zależnością pomiędzy mniejszą lub większą liczbą wielkości fizycznych, przy pominięciu wielu innych czynników wpływających na przebieg doświadczenia. Ten fakt oraz szereg innych, związanych z samym przyrządem pomiarowym i eksperymentatorem, jest przyczyną, że każdy pomiar obarczony jest błędem (niepewnością). Zatem rzetelne opracowanie pomiarów powinno zawierać także ocenę ich dokładności i wiarygodności, tzn., ocenę niepewności pomiarów.

Z prób rozwiązania tego problemu powstały różnorodne i bardzo rozbudowane teorie błędu, często trudne do wzajemnego porównania. Dlatego koniecznością stało się opracowanie jednolitego, opartego na pewnym kompromisie, systemu oceny i zapisu niepewności pomiarowych.

W 1995 r., po wielu latach pracy, uzgodniono międzynarodowe normy dotyczące niepewności w pomiarach. Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) opublikowała dokument („Przewodnik”, „Międzynarodowa Norma”), który – po dokonaniu przekładu na język polski i przyjęciu odpowiedniej ustawy – zobowiązuje Polskę do stosowania norm ISO w zakresie obliczania i podawania we wszystkich publikacjach wyników i niepewności pomiarów zgodnie z tą „Normą” [1].

Nowości dotyczą przede wszystkim odróżniania niepewności pomiaru od błędu w potocznym tego słowa znaczeniu, przyjęcia uzgodnionej terminologii i powszechnie akceptowanej miary niepewności w pomiarach, szerszego korzystania z metod statystycznych oraz sposobu oceny i obliczania niepewności. Szersze wprowadzenie tych nowych zasad oraz krytyczną dyskusję „Normy” można znaleźć w publikacjach H. Szydłowskiego [2] oraz A. Zięby [3].

W skrypcie zastosowano niektóre zalecenia Międzynarodowej Normy przy szacowaniu i obliczaniu, a szczególnie oznaczaniu niepewności w pomiarach, zachowując pewne stosowane do tej pory sposoby analizy i obliczania błędów pomiarów [4, 5, 6, 7].

## 2. BŁĘDY I NIEPEWNOŚCI POMIAROWE

Praca w laboratorium fizycznym polega na obserwacji zjawisk fizycznych, wykonywaniu pomiarów i ich interpretacji na podstawie poznanych teorii i praw fizyki. Oprócz poprawnego wykonania pomiarów, bardzo istotna jest analiza końcowych wyników pod względem ich wiarygodności i dokładności oraz przedstawienie uzyskanych rezultatów w sposób umożliwiający ich prawidłową interpretację, to jest jasno, przejrzysto i zgodnie z ogólnie przyjętymi zasadami.

Wskutek niedokładności naszych przyrządów pomiarowych oraz niedoskonałości naszych zmysłów każdy, nawet najstaranniej przygotowany i wykonany pomiar daje wynik obciążony pewną niepewnością, różny od wartości rzeczywistej. Wartość niepewności może mieć zasadnicze znaczenie przy formułowaniu różnych praw fizyki i często decyduje o przyjęciu lub odrzuceniu jakiejś teorii. Analiza błędów dokonana przed przystąpieniem do pomiaru może wykazać jego zupełną niecelowość i narzucić konieczność użycia innych przyrządów lub metod pomiarowych. Rozpatrzenie całości metody jakiegoś pomiaru oraz właściwa ocena popełnionych błędów pozwala ustalić dokładność, z jaką należy wykonać pomiar, oraz na pomiar jakiej wielkości należy zwrócić szczególną uwagę. Stopień dokładności pomiaru zależy od używanych przyrządów i stosowanej metody pomiarowej i byłoby stratą czasu starać się otrzymać większą dokładność od tej, jaką określają zadane warunki pomiarowe.

Międzynarodowa Norma jako podstawę przyjmuje nową filozofię traktowania zjawiska błędu. Na tej podstawie następuje uściślenie nazewnictwa, w szczególności znaczenia kluczowych słów „**błąd**” i „**niepewność**”. Termin błąd (pomiaru) powinien być używany w znaczeniu jakościowym albo oznaczać różnicę:

błąd pomiaru = wartość zmierzona – wartość rzeczywista

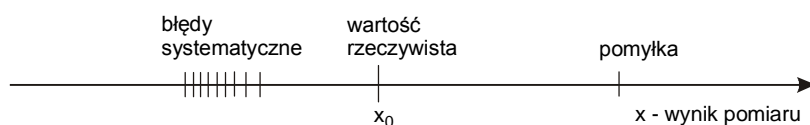
$$\Delta x = x - x_0 \quad (1)$$

Wynik liczbowy wyrażenia (1) nie może być wyliczony, gdyż nie jest znana wartość rzeczywista  $x_0$ . Jest to realizacja pojedynczej zmiennej losowej i nie może być wyliczona a priori, podobnie jak nie można przewidzieć wyniku rzutu kostką. Tak zdefiniowany błąd pomiaru nie jest zatem przedmiotem zainteresowania rachunku niepewności pomiaru. Sama nazwa (błąd) tej wady pomiarów sugeruje możliwość jej usunięcia. Rodzaje błędów pomiarowych omówimy na prostym przykładzie pomiaru przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego (ćw. 2). Wyobraźmy sobie, że zmierzaliśmy kilkakrotnie czas wahań metalowej kulki przywiązanej do końca nici o długości  $l$ . Początkowe wychylenie kulki wynosiło  $20^\circ$ . Obliczenie przyspieszenia ziemskiego przy użyciu wzoru na okres wahań wahadła prostego

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

spowoduje otrzymanie wyników systematycznie zaniżonych w stosunku do wartości rzeczywistej. Przyczyną jest zastosowanie przybliżonego wzoru na okres wahań wahadła – słusznego tylko w przypadku małych wychyleń. O tak otrzymanych wynikach pomiarów powiemy, że są one obarczone **błędem systematycznym**. Inną przyczyną powstania tego typu błędów może być np. użycie stopera, którego wskazówki z chwilą rozpoczęcia pomiarów nie pokrywają się z początkiem skali lub stoper „chodzi” za wolno albo za szybko, wywołując systematyczne zaniżanie lub zawyżanie wartości okresu wahań.

Przypuśćmy, że w serii pięciu pomiarów czasu 50 wahań, jeden z pomiarów został zakończony po 45 wahań. Pomiar ten da drastycznie różną wartość przyspieszenia ziemskiego. Określimy go jako pomiar obarczony **błędem grubym**, czyli **pomyłką**. Pomyłki powstają również wskutek fałszywego odczytania wskazań przyrządów lub nieprawidłowego zapisania odczytu (np. pomyłka w jednostkach). Pomyłki dają się łatwo zauważyć, ponieważ otrzymany wynik różni się znacznie od innych wyników pomiarów tej samej wielkości (rys. 1).



Rys. 1

Na rysunku pokazano serię pomiarów wielkości  $X$ , obciążonej błędami systematycznymi i pomyłką, przy czym  $x_0$  jest wartością rzeczywistą wielkości  $X$ .

Błędy pomiarowe, zarówno systematyczne, jak i grube, mają wspólną cechę. Można je wyeliminować poprzez: a) użycie właściwie działających przyrządów, b) poprawne przeprowadzenie pomiarów, c) stosowanie poprawek matematycznych do wzorów przybliżonych, d) usunięcie z serii pomiarów wyniku obciążonego błędem grubym lub jego powtórzenie, o ile mamy taką możliwość.

W naszej praktyce laboratoryjnej zakładamy, że wszystkie błędy systematyczne zostały rozpoznane przez eksperymentatora i uwzględnione w trakcie pomiarów, a wyniki tych pomiarów są wolne od błędów systematycznych.

Wyeliminowanie błędów pomiarowych jest zabiegiem koniecznym, ale nie prowadzącym do uzyskania wyników jednoznacznie pokrywającymi się z rzeczywistą wartością wielkości mierzonej. Każdy bowiem pomiar jest obciążony **niepewnością pomiarową**.

Międzynarodowa Norma wprowadza pojęcie „niepewność pomiaru” jako najważniejszy na nowo określony termin. Zgodnie z „Przewodnikiem”: „niepewność jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej”. Takim przykładowym parametrem określającym niepewność pomiaru może być odchylenie standardowe obliczone dla serii pomiarów.

Wśród niepewności pomiarowych wyróżnić można **niepewności przypadkowe** i **niepewności systematyczne**. Na ogół jednak któraś z wymienionych niepewności pomiarowych dominuje.

Jeżeli dokładność przyrządu jest dostatecznie duża, wówczas w serii pomiarowej otrzymamy pewien rozrzut wyników. Świadczy to o przewadze niepewności przypadkowych nad systematycznymi.

Źródłem występowania niepewności przypadkowych może być mierzona wielkość (mówimy wówczas o **niepewności przypadkowej obiektu**) lub sam eksperymentator wraz z otoczeniem i przyrządami pomiarowymi (**niepewność przypadkowa metody**). Np. niepewność przypadkowa obiektu przy pomiarze grubości płytki ołowianej śrubą mikrometryczną będzie miała swe źródło w różnicach grubości płytki mierzonej w kilku różnych punktach. Niepewność przypadkowa metody wynikać może natomiast z różnic w dociskaniu śruby w kolejnych pomiarach.

Na powstanie niepewności przypadkowych nakłada się wiele niezależnych przyczyn, co prowadzi do tego, że wyniki pomiarów, w których dominują niepewności przypadkowe, układają się symetrycznie wokół wartości rzeczywistej (rys. 2).



Rys. 2

Natomiast źródłem niepewności systematycznych są ograniczone możliwości pomiarowe związane z klasą (dokładnością) użytego przyrządu oraz z możliwością odczytu jego wskazań przez obserwatora. Przewaga niepewności systematycznych nad przypadkowymi ujawni się poprzez otrzymanie identycznych bądź nieznacznie różniących się wyników w określonej serii pomiarów.

Jak już wspomnieliśmy, całkowite usunięcie niepewności nie jest możliwe. Można je co najwyżej zmniejszyć poprzez stosowanie dokładniejszych przyrządów pomiarowych oraz zwiększenie liczby pomiarów.

Pojęcie niepewności przypadkowej czy systematycznej jest równoważne pojęciu błędu przypadkowego (losowego) lub błędu systematycznego, które to nazwy są stosowane do tej pory w wielu opracowaniach dotyczących analizy pomiarów. Ponadto, stosownie do zaleceń Międzynarodowej Normy, wprowadza się następujące terminy o nowym znaczeniu:

- **niepewność standardowa  $u(x)$** ; jest to niepewność pomiaru odpowiadająca odchyleniu standardowemu średniej;
- ocena **niepewności typu A**; oparta na metodzie określenia niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii wyników pomiarów;
- ocena **niepewności typu B**; oparta na metodzie określania niepewności pomiarów drogą inną niż w przypadku metody typu A (np. na podstawie klasy przyrządu);
- **złożona niepewność standardowa  $u_c(y)$** ; niepewność wyników pomiarów pośrednich i jest obliczana z prawa przenoszenia niepewności pomiaru.

Rozróżnienie metod obliczania typu A i B nie ma nic wspólnego z dotychczasowym podziałem na błędy przypadkowe i systematyczne (Międzynarodowa Norma nie neguje zresztą tego tradycyjnego rozróżnienia), lecz wskazuje na dwie różne drogi oceny składników niepewności. Obie metody oceny niepewności oparte są na rachunku prawdopodobieństwa, a ilościową miarą każdego ze składników jest odchylenie standardowe.

Niepewność standardową **typu A** oblicza się na podstawie rozkładu częstości pojawiania się określonego wyniku pomiaru  $x$ , a więc opierając się na rozkładzie normalnym (Gausa), natomiast niepewność standardową **typu B** oblicza się (a raczej szacuje) na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa przyjętego przez eksperymentatora (prawdopodobieństwo subiektywne). Na ogół będzie to rozkład jednostajny (prostokątny).

W dalszej części opracowania zostały opisane sposoby postępowania, gdy w pomiarze wielkości  $X$  przeważa niepewność systematyczna (pkt 3), bądź przypadkowa (pkt 4), a także wtedy, gdy niepewności przypadkowa i systematyczna dają porównywalny wkład do niepewności pomiaru wielkości  $X$  (pkt 5).

### 3. NIEPEWNOŚCI SYSTEMATYCZNE (MAKSYMALNE). OCENA TYPU B

#### 3.1. Niepewności systematyczne pomiarów bezpośrednich

Jak wspomniano wcześniej (pkt 2), niepewności systematyczne dominują wtedy, gdy w serii  $n$  pomiarów wielkości  $X$  nie występuje lub prawie nie występuje rozrzut statystyczny wyników pomiarów, czyli  $x_1 \cong x_2 \cong \dots \cong x_n$ . Na wielkość niepewności systematycznej składają się dwa przyczynki, jeden pochodzący od użytego w pomiarach przyrządu (działka elementarna, klasa przyrządu, dokładność odczytu) i drugi – związany z wykonywaniem czynności pomiarowej przez obserwatora (niepewność eksperymentatora).

Niepewność systematyczna związana z użytym przyrządem zależy od klasy dokładności tego przyrządu wskazującej na jego odstępstwa od wzorca. W dobrych przyrządach pomiarowych podziałka skali zgadza się zwykle z klasą danego przyrządu, która oznacza maksymalną niepewność systematyczną wnoszoną przez sam przyrząd, np. dla termometru pokojowego niepewność systematyczna  $\Delta t = 1^\circ\text{C}$ , ale dla termometru laboratoryjnego może być nawet lepsza niż  $0,5^\circ\text{C}$ , miarka milimetrowa to  $\Delta l = 1 \text{ mm}$ , a śruba mikrometryczna to  $\Delta l = 0,01 \text{ mm}$ .

Niepewność odczytu na podziałce ustala obserwator, uwzględniając różne czynniki wpływające na wynik pomiaru. Tak więc, jeśli wykonujemy pomiar napięcia woltomierzem klasy 0,5 o zakresie 300 V, to bezwzględna niepewność systematyczna wprowadzona przez przyrząd będzie wynosiła 1,5 V. Jeśli niepewność położenia wskazówki oceniamy na 2,5 V, to całkowita niepewność pomiaru będzie równa 4 V; wynik pomiaru zapiszemy wtedy jako  $(239 \pm 4) \text{ V}$  lub  $239(4) \text{ V}$ . W ocenie niepewności odczytu istotne znaczenie odgrywa również szerokość samej wskazówki oraz jej zachowanie podczas pomiaru (drżenie, wahania wokół ustalonego położenia itp.).

Ten sposób oceny niepewności systematycznej jest stosowany w przypadku przyrządów analogowych, natomiast w przypadku coraz częściej spotykanych w laboratorium przyrządów cyfrowych, niepewność pomiaru jest podawana przez producenta w instrukcji

obsługi miernika. Stanowi ona najczęściej sumę określonego ułamka wartości zmierzonej  $x$  i ułamka zakresu  $z$

$$\Delta = c_1 \cdot x + c_2 \cdot z. \quad (2)$$

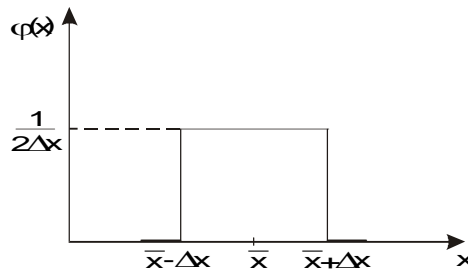
Niepewność maksymalna przyrządu jest zatem na ogół większa od działki elementarnej. Np. dla pewnego typu omomierza  $c_1 = 0,002$ , a  $c_2 = 0,001$  i na zakresie  $20 \text{ k}\Omega$  przy pomiarze oporu o wartości  $10 \text{ k}\Omega$  otrzymujemy wartość  $\Delta R = 0,04 \text{ k}\Omega$ , co stanowi równowartość czterech działek elementarnych miernika ( $1 \text{ dz.} = 0,01 \text{ k}\Omega$ ).

W przypadku niepewności systematycznych zawsze zakładamy, że przyczynki pochodzące od przyrządów i obserwatora nie kompensują się, ale dodają do siebie z jednakowymi znakami. Zatem całkowita niepewność systematyczna pomiaru może być wyrażona w postaci sumy

$$\Delta x = \Delta_d x + \Delta_k x + \Delta_o x + \Delta_e x, \quad (3)$$

gdzie indeksy określają odpowiednie przyczynki do niepewności pomiaru ( $d$  – działka elementarna,  $k$  – klasa przyrządu,  $o$  – odczyt,  $e$  – eksperymentator). Gdy dominuje jeden typ niepewności systematycznej, jak na przykład działka elementarna  $\Delta_d l = 1 \text{ mm}$  w pomiarze długości  $l = 35 \text{ mm}$ , wtedy przyczynk  $\Delta_l x$  wnoszony przez ten typ niepewności systematycznej jest jedyną miarą maksymalnej niepewności systematycznej  $\Delta x = \Delta_l x$ .

Określona w ten sposób sumaryczna niepewność  $\Delta x$  (wz. (3)) nazywa się **maksymalną niepewnością systematyczną**. Do tak określonej niepewności  $\Delta x$  nie można zastosować rozważań takich jak dla niepewności przypadkowych, których analiza oparta jest na rozkładzie Gaussa. Musimy ją interpretować jako



Rys. 3

połowę szerokości przedziału od  $x - \Delta x$  do  $x + \Delta x$ , który na pewno (z prawdopodobieństwem  $P = 1$ ) zawiera wartość rzeczywistą. Interpretacja taka nie precyzuje rozkładu prawdopodobieństwa wewnątrz przedziału, ale zakładamy, że wszystkie wartości wewnątrz tego przedziału są równie prawdopodobne. Oznacza to, że dla wielkości  $X$  przyjmujemy prostokątny rozkład prawdopodobieństwa przedstawiony na rys. 3.

Dla prostokątnego (jednostajnego) rozkładu funkcji  $\varphi(x)$ , niepewność standardowa  $u(x)$  związana jest z maksymalną niepewnością systematyczną  $\Delta x$ , oszacowaną metodą typu B, następującym wzorem:

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Zgodnie z Międzynarodową Normą relacja (4) pozwala na włączenie niepewności systematycznej pomiaru  $\Delta x$  do prawa przenoszenia niepewności dla wielkości złożonej  $Y$  (pkt. 4), a także umożliwia określenie niepewności standardowej  $u(x)$  wielkości  $X$ , w której występuje zarówno składowa systematyczna, jak i przypadkowa (pkt. 5).

### Przykład 1

Wykonano pomiary natężenia prądu płynącego przez uzwojenie busoli stycznych (ćw. 19). Pomiary próbne wykazały nieznaczny rozrzut wyników:  $I_1 \approx I_2 \approx I_3 \approx \dots \approx 0,80 \text{ A}$ . Oznacza to przewagę niepewności systematycznych pomiaru nad niepewnościami przypadkowymi. W pomiarze użyto amperomierza klasy 0,5 o zakresie 1A i najmniejszej działce 0,01A. Wahania wskazówki wg oceny eksperymentatora mieściły się w granicach jednej działki. Łącznie, zgodnie ze wzorem (3), maksymalna niepewność systematyczna pomiaru wynosi:  $\Delta I = 0,005\text{A} + 0,01\text{A} + 0,005\text{A} = 0,02\text{A}$ . Względna niepewność systematyczna pomiaru:  $\delta_1[\%] = 3\%$ , a wynik końcowy – zgodnie z Normą zapisujemy w postaci:  $I = (0,80 \pm 0,02)\text{A}$  lub  $I = 0,80(2)\text{A}$ .

### 3.2. Niepewności systematyczne pomiarów pośrednich

W większości doświadczeń nie mierzymy bezpośrednio interesującej nas wielkości  $Y$ . Mierzymy natomiast pewne wielkości pierwotne  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  i obliczamy wartość wielkości  $Y$  jako funkcję tych wielkości. I tak na przykład, objętość sześcianu wyznaczamy mierząc długość jego krawędzi, przyspieszenie ziemskie  $g$  wyznaczamy mierząc okres wahań  $T$  i długość  $l$  wahadła, ogniskową soczewki możemy wyznaczyć mierząc odległość przedmiotu i obrazu od soczewki.

Prawo przenoszenia niepewności prowadzi do następującego sposobu postępowania: chcąc wyznaczyć niepewność systematyczną wielkości  $Y$ , której wartość  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , musimy obliczyć zmianę  $\Delta y$  tej funkcji spowodowaną zmianami jej argumentów o  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , które to wielkości są niepewnościami systematycznymi mierzonych bezpośrednio wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Rozpatrzmy najpierw prosty przypadek, w którym wyznaczana przez nas wielkość  $Y$  jest funkcją tylko jednej zmiennej  $x$  obciążonej niepewnością pomiarową  $\pm \Delta x$ , czyli

$$y \pm \Delta y = f(x \pm \Delta x). \quad (5)$$

Stosując rozwinięcie w szereg Taylora, mamy

$$y \pm \Delta y = f(x) \pm \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} + \dots \quad (6)$$

Zaniedbując w rozwinięciu wyrazy, w których występują  $\Delta x$  w wyższej potędze niż pierwszej, jako bardzo małe, otrzymujemy

$$y \pm \Delta y = f(x) \pm \frac{df(x)}{dx} \cdot \Delta x. \quad (7)$$

Ponieważ  $y = f(x)$ , więc możemy zapisać

$$\Delta y = \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \cdot \Delta x. \quad (8)$$

Bezwzględna niepewność wielkości będącej funkcją jednej zmiennej (której wartość mierzymy) równa jest bezwzględnej niepewności wielkości mierzonej pomnożonej przez pochodną funkcji.

Uogólniając ten przypadek na funkcję wielu zmiennych  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  i postępując w ten sam sposób, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, otrzymujemy

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \cdot \Delta x_n. \quad (9)$$

Wyznaczona w ten sposób wartość  $\Delta y$  jest **bezwzględną maksymalną niepewnością** wielkości złożonej  $Y$ . Niepewność względną  $\delta_y [\%]$  otrzymamy, dzieląc wyrażenie (9) przez wartość funkcji  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$$\delta_y [\%] = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%. \quad (10)$$

Występujące we wzorze (9) symbole nazywamy pochodnymi cząstkowymi. Oblicza się je w taki sam sposób jak zwykle pochodne funkcji jednej zmiennej  $x_i$  przy założeniu, że pozostałe zmienne są wielkościami stałymi. Wyrażenie określone wzorem (9) przypomina różniczkę zupełną, dlatego często ten sposób obliczania niepewności nazywamy **metodą różniczki zupełnej**.

### Przykład 2

Ogniskową soczewki metodą Bessela (ćw. 27) wyliczamy ze wzoru

$$f = \frac{(e^2 - d^2)}{4e},$$

gdzie:  $e$  – odległość ekranu (obrazu) od przedmiotu,

$d$  – odległość między dwoma położeniami soczewki, przy których na ekranie otrzymujemy ostry, rzeczywisty obraz przedmiotu.

Jeden z pomiarów dał następujące wartości:  $e = 85$  cm,  $d = 42$  cm. Maksymalną niepewność systematyczną obu pomiarów eksperymentator oszacował na 0,5 cm. Zgodnie ze wzorem (9) obliczamy niepewność maksymalną wielkości złożonej

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \cdot \Delta e + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \cdot \Delta d,$$

$$\Delta f = \left| \frac{e^2 + d^2}{4e^2} \right| \cdot \Delta e + \left| -\frac{d}{2e} \right| \cdot \Delta d.$$

Podstawiając dane numeryczne, otrzymujemy

$$\Delta f = |0,311| \cdot 0,5 \text{ cm} + |-0,247| \cdot 0,5 \text{ cm} = 0,279 \text{ cm}.$$

Obliczona wartość ogniskowej soczewki  $f = 16,061$  cm.

Względny błąd  $\delta_f [\%]$  pomiaru ogniskowej obliczamy ze wzoru (10), otrzymując wynik:  $\delta_f [\%] = 2\%$ .



Wynik końcowy pomiaru wraz z niepewnością zapisujemy w postaci

$$f = (16,0 \pm 0,3) \text{ cm} \text{ lub } f = 16,0(3) \text{ cm}, \delta_f[\%] = 2\%.$$

W przypadkach, gdy funkcja  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ma postać iloczynową, wygodnie jest obliczać różniczkę zupełną po uprzednim zlogarytmowaniu funkcji – ten sposób obliczania niepewności pomiarowej nosi nazwę **metody różniczki logarytmicznej**. W metodzie tej wykorzystuje się znaną własność funkcji logarytmicznej, której różniczka

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x},$$

a więc przyrost funkcji równy jest względnemu przyrostowi jej argumentu. Zaprezentujemy tę metodę na przykładzie funkcji złożonej, zapisanej równaniem

$$y = Ax_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \quad (11)$$

gdzie:  $A, a_1, a_2$  – pewne wielkości stałe.

Po zlogarytmowaniu otrzymujemy

$$\ln y = \ln A + a_1 \ln x_1 + a_2 \ln x_2. \quad (12)$$

Różniczkę zupełną tego wyrażenia można zapisać jako

$$\frac{dy}{y} = a_1 \frac{dx_1}{x_1} + a_2 \frac{dx_2}{x_2}. \quad (13)$$

Podstawiając w miejsce  $dy, dx_1, dx_2$  wartości bezwzględnych systematycznych niepewności pomiarowych:  $\Delta y, \Delta x_1, \Delta x_2$ , możemy otrzymać wyrażenie na maksymalną niepewność względną wielkości złożonej  $Y$ :

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| a_1 \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| a_2 \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|. \quad (14)$$

Zauważmy, że metoda różniczki logarytmicznej daje bezpośrednio **niepewność względną**  $\delta_y$ , a po przemnożeniu przez wartość funkcji  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  otrzymujemy maksymalną **niepewność bezwzględną**  $\Delta y$ .

Uogólniając powyższe wyrażenie na przypadek funkcji  $n$  zmiennych

$$y = \prod_{i=1}^n A \cdot x_i^{a_i},$$

możemy zapisać:

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \sum_{i=1}^n \left| a_i \frac{\Delta x_i}{x_i} \right|. \quad (15)$$

Metoda ta ma tę zaletę, że oprócz znacznego uproszczenia obliczeń pozwala na szybką ocenę, która z wielkości mierzonych bezpośrednio wnosi największy przyczynek do niepewności wielkości końcowej, ponieważ obliczona tą metodą maksymalna niepewność

względna  $\Delta y/y$  jest sumą niepewności względnych  $\Delta x_i/x_i$  poszczególnych wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mnożonych przez współczynniki  $a_i$ .

### Przykład 3

Metodę różniczki logarytmicznej zaprezentujemy na przykładzie wyznaczania równoważnika elektrochemicznego miedzi ( $k$ ) za pomocą woltametri (ćw. 16). Zgodnie z prawem Faradaya masa miedzi wydzielona podczas elektrolizy na elektrodzie określona jest wyrażeniem:  $m = k \cdot I \cdot t$ , a stąd wartość równoważnika elektrochemicznego możemy wyliczyć ze wzoru

$$k = \frac{m}{I \cdot t}.$$

W trakcie pomiarów uzyskano następujące wartości wyników i ich niepewności:  $I = 2,00(2)\text{A}$ ,  $t = 1800(2)\text{ s}$ ,  $m = 1,19(2)\text{ g}$ . Obliczona wartość równoważnika elektrochemicznego miedzi wynosi  $k = 3,3055 \cdot 10^{-7}\text{ kg/C}$ .

Stosując metodę różniczki logarytmicznej (wz. (15)), obliczamy maksymalną niepewność względną

$$\left| \frac{\Delta k}{k} \right| = \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| -\frac{\Delta t}{t} \right| + \left| -\frac{\Delta I}{I} \right|,$$

a po podstawieniu wartości liczbowych

$$\left| \frac{\Delta k}{k} \right| = 0,0168 + 0,00111 + 0,01 = 0,02791$$

oraz

$$\delta_k [\%] = \left| \frac{\Delta k}{k} \right| \cdot 100\% = 3\%.$$

Jak widać z powyższych obliczeń, największy wkład w niepewność pomiaru równoważnika elektrochemicznego miedzi wnosi pomiar masy ( $\sim 2\%$ ) oraz pomiar natężenia prądu ( $\sim 1\%$ ) – znikomy zaś pomiar czasu ( $\sim 0,11\%$ ). Stąd wniosek praktyczny: bardzo starannie należy wyznaczać masę miedzi wydzielonej na elektrodzie, a miernik natężenia prądu wymienić na lepszy (o lepszej klasie). Natomiast maksymalna, bezwzględna niepewność systematyczna w wyznaczaniu równoważnika elektrochemicznego wynosi

$$\Delta k = k \cdot \left| \frac{\Delta k}{k} \right| = 0,09 \cdot 10^{-7}\text{ kg/C}$$

i ostateczny wynik zapisujemy w postaci

$$k = (3,31 \pm 0,09) \cdot 10^{-7}\text{ kg/C} \text{ lub } 3,31(9) \cdot 10^{-7}\text{ kg/C}; \delta_k [\%] = 3\%.$$

Tak wyznaczona bezwzględna niepewność maksymalna  $\Delta k$  określa nam przedział, w którym z prawdopodobieństwem 100% powinna znajdować się wartość rzeczywista. Porównując wyznaczoną w doświadczeniu wartość  $k$  z wartością tablicową  $k_{\text{tab}} = 3,297 \cdot 10^{-7}\text{ kg/C}$ , widzimy, że mieści się ona w wyznaczonym przez nas przedziale niepewności, a więc możemy stąd wnioskować o poprawności zarówno zastosowanej przez nas metody pomiarowej, jak i oceny niepewności.

Omawiane w tym rozdziale metody różniczki zupełnej i logarytmicznej obliczania niepewności pomiarów wielkości złożonych stosowane są wówczas, gdy niepewności sys-

tematyczne pomiarów bezpośrednich są znacznie większe od niepewności przypadkowych. Zakładamy przy tym najbardziej niekorzystną z punktu widzenia eksperymentatora sytuację, w której niepewności pomiarów bezpośrednich nie kompensują się nawzajem – dlatego w ten sposób wyznaczamy **maksymalne, systematyczne niepewności** pomiarowe (bezwzględna -  $\Delta y$  i względna -  $\delta_y$ ) wielkości złożonej  $Y$ .

## 4. NIEPEWNOŚCI PRZYPADKOWE – DUŻE W PORÓWNANIU Z SYSTEMATYCZNYMI. OCENA TYPU A

### 4.1. Niepewności przypadkowe pomiarów bezpośrednich. Rozkład Gaussa

Przewaga niepewności przypadkowych nad systematycznymi ujawnia się poprzez otrzymanie w serii pomiarów pewnej wielkości fizycznej, wyników różniących się między sobą. Ten rozrzut wyników ma pewne określone cechy, których występowania nie da się ująć w żadne związki przyczynowe, ale które podlegają pewnym prawidłowościom statystycznym (zob. ćw.1).

W większości doświadczeń stwierdza się, że rozkład częstości występowania niepewności przypadkowych można opisać funkcją  $\varphi(x)$  w postaci

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (16)$$

Funkcja rozkładu  $\varphi(x)$  wyrażona wzorem (16) opisuje znany w statystyce matematycznej rozkład normalny, zwany rozkładem Gaussa. Funkcja ta zależy od dwóch parametrów  $\mu$  i  $\sigma$  oraz spełnia warunek normalizacyjny

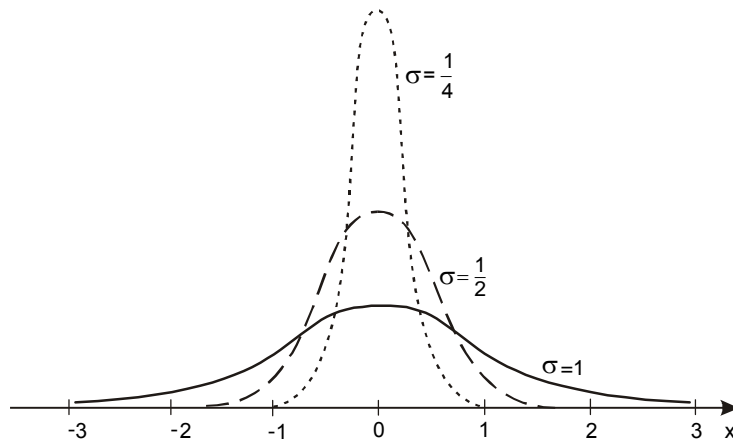
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (17)$$

Warunek ten wynika z właściwości funkcji i określa, że prawdopodobieństwo znalezienia dowolnego wyniku pomiaru  $x$  w przedziale od  $-\infty$  do  $+\infty$  jest równe pewności, czyli 1.

Parametry  $\mu$  i  $\sigma$  mają prostą interpretację analityczną. Dla wartości  $x = \mu$  funkcja  $\varphi(x)$  osiąga maksimum. Parametr  $\sigma$  ma natomiast tę cechę, że wartości  $\mu + \sigma$  i  $\mu - \sigma$  określają punkty przegięcia krzywej Gaussa. A więc wartość  $\sigma$  możemy traktować jako miarę szerokości rozkładu.

Natomiast statystyczna interpretacja parametrów  $\mu$  i  $\sigma$  wskazuje, że wartość  $\mu$ , przy której funkcja Gaussa przyjmuje maksimum, jest wartością oczekiwaną rozkładu (w praktyce wartością średnią z  $n$  pomiarów), a parametr  $\sigma$  – odchyleniem standardowym.

Z przedstawionych na rys. 4 wykresów funkcji Gaussa dla różnych wartości parametru  $\sigma$  widać, że ze wzrostem wartości  $\sigma$  rozkłady stają się coraz bardziej spłaszczone, co można interpretować jako wzrost liczby pomiarów coraz bardziej różniących się od wartości rzeczywistej  $x_0$ . Wydaje się oczywiste, że niepewność przypadkowa pojedynczego pomiaru powinna być określona za pomocą wielkości będącej miarą rozrzutu wyników wokół wartości rzeczywistej. Taką właśnie wielkością jest parametr  $\sigma$  (rys. 4).

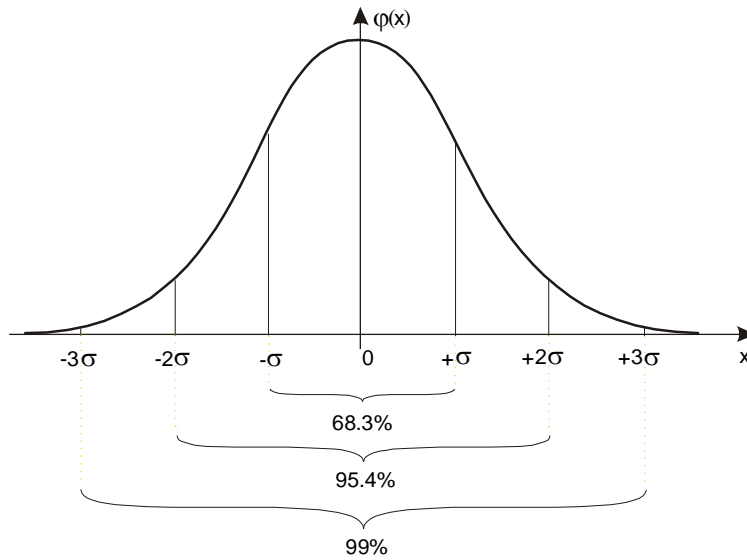


Rys. 4

Prawdopodobieństwo  $P(x)$  znalezienia wyniku pomiaru  $x$  w przedziale o określonej szerokości wylicza się z całki oznaczonej po funkcji rozkładu Gaussa  $\varphi(x)$

$$P(x) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx, \quad (18)$$

gdzie granice całkowania  $x_1$  i  $x_2$  określają szerokość przedziału, w którym znajduje się wynik pomiaru. Z tak obliczonych całek można wyciągnąć następujące wnioski: w przedziale  $x \pm \sigma$  powinno znajdować się ponad 68% wyników pomiarów, w przedziale  $x \pm 2\sigma - 95,4\%$ , a w przedziale  $x \pm 3\sigma$  ponad 99% (rys. 5).



Rys. 5

Rozkład Gaussa jest rozkładem ciągłym, dobrze przybliżającym doświadczalny rozkład wyników pomiarów, w których dominują niepewności przypadkowe. Stoimy teraz przed problemem oszacowania parametrów tego rozkładu na podstawie skończonej liczby  $n$  pomiarów.

Wartość rzeczywistą  $x_0$ , którą zinterpretowaliśmy jako wartość oczekiwaną rozkładu, najlepiej przybliży średnia arytmetyczna. Jest to konsekwencja wynikającej z rozkładu Gaussa metody najmniejszych kwadratów, tj. warunku, aby suma kwadratów odchyłeń wyników pomiaru od wartości rzeczywistej była minimalna, tzn.

$$y = \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i)^2 = \min. \quad (19)$$

Różniczkując wyrażenie (19) względem  $x$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2 \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) = 0, \\ nx_0 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 0, \\ x_0 &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \end{aligned} \quad (20)$$

Tak więc wartością najbardziej prawdopodobną (wartością oczekiwaną) wielkości  $x_0$  jest średnia arytmetyczna z  $n$  pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (21)$$

Natomiast parametr  $\sigma$  określający rozrzut wyników wokół wartości rzeczywistej  $x_0$  przybliżamy wielkością  $\sigma(x)$  obliczoną na podstawie wzoru

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_0 - x_i)^2}{n}}, \quad (22)$$

gdzie  $x_0$  jest wartością rzeczywistą, a  $x_i$  – wartością  $i$ -tego pomiaru.

Ponieważ nie znamy jednak wartości rzeczywistej  $x_0$ , a jedynie jej oszacowanie przez średnią arytmetyczną  $\bar{x}$ , posługujemy się wzorem w postaci

$$S(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \quad (23)$$

Tak zdefiniowana niepewność pomiarowa nosi nazwę **odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru**. Różnica między wzorami (22) i (23) polega nie tylko na zastąpieniu wartości rzeczywistej  $x_0$  przez średnią arytmetyczną  $\bar{x}$ , ale również na zamianie mianownika z  $n$  na  $n - 1$ . Wynika to z faktu, że w liczniku, który jest sumą kwadratów odchyłeń pomiaru  $x_i$  od średniej arytmetycznej  $\bar{x}$ , mamy już tylko  $n - 1$  niezależnych składników.

Wielkość  $S(x)$  określa nam niepewność przypadkową pojedynczego pomiaru i jej wartość nie zależy od liczby pomiarów, a tylko od właściwości obiektu mierzonego i warunków, w jakich jest wykonywany pomiar, ponieważ tylko te czynniki decydują o szerokości rozkładu prawdopodobieństwa.

Dla eksperymentatora wykonującego  $n$  pomiarów danej wielkości najistotniejsza jest ocena, o ile i z jakim prawdopodobieństwem wyznaczona wartość średnia  $\bar{x}$  różni się od wartości rzeczywistej  $x_0$ . Wielkością pozwalającą na taką ocenę jest odchylenie standardowe wartości średniej, które zgodnie z Międzynarodową Normą nosi nazwę **niepewności standardowej  $u(x)$**  zdefiniowanej wzorem (ocena typu A)

$$u(x) = \frac{S(x)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (24)$$

Niepewność standardowa  $u(x)$ , określona wzorem (24) jest sumaryczną miarą niepewności pochodzących od wszystkich możliwych typów niepewności przypadkowych występujących w pomiarach i jej wartość maleje ze wzrostem liczby pomiarów  $n$ .

Wartość  $u(x)$  określa nam wielkość przedziału wokół wartości średniej  $\bar{x}$ , w którym z prawdopodobieństwem 68% można oczekiwać wartości rzeczywistej. Wzięcie przedziału równego  $2u(x)$  i  $3u(x)$  powoduje wzrost tego prawdopodobieństwa do odpowiednio 95,4% i 99,7%. A więc podając przedział niepewności przypadkowej, należy równolegle podać wartość prawdopodobieństwa. Należy tu zaznaczyć, że innymi gaussowskimi (tzn. opartymi na założeniu, że pomiary danej wielkości mają rozkład Gaussa) miarami niepewności przypadkowej mogą być tzw. **niepewność przeciętna i niepewność prawdopodobna**, wyznaczające granice znalezienia rzeczywistej wartości z prawdopodobieństwem odpowiednio 57% i 50%. Np. niepewność przeciętną definiujemy wzorem

$$s_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (25)$$

przy czym zależność między niepewnością przeciętną a niepewnością standardową  $u(x)$  daje związek

$$\frac{u(x)}{s_p} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,25. \quad (26)$$

#### Przykład 4

Wykonano 10 pomiarów długości wałka stalowego przy użyciu suwmiarki, której najmniejsza działka wynosi 0,1 mm. Uzyskano następujące wyniki: 35,6; 35,8; 35,7; 35,5; 35,6; 35,9; 35,7; 35,8; 35,9; 35,4 (mm). Zgodnie ze wzorem (21) wartość średnia długości wynosi  $\bar{l} = 35,69$  mm, natomiast niepewność standardowa  $u(l)$  zgodnie ze wzorem (24) ma wartość  $u(l) = 0,053$  mm. Wynik końcowy pomiaru należy zapisać w postaci:  $l = 35,69(5)$  mm, lub  $\bar{l} = (35,69 \pm 0,05)$  mm oraz  $\delta_l [\%] = 0,1\%$ . Zauważmy, że wartość niepewności standardowej  $u(l)$  jest porównywalna z niepewnością maksymalną  $\Delta l$ , której wartość jest nie mniejsza niż 0,1 mm! (patrz pkt 5).

## 4.2. Niepewności przypadkowe pomiarów pośrednich

W praktyce laboratoryjnej najczęściej wykonujemy pomiary pośrednie, a wielkość fizyczną wyznaczoną w eksperymencie oblicza się, opierając się na określonym prawie fizycznym i wynikającym z tego prawa wzorze. Jeżeli wielkości  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  bezpośrednio mierzone nie są skorelowane, tzn. każdą wielkość mierzy się w innym niezależnym doświadczeniu, to dla danej funkcji

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad (27)$$

niepewność standardową  $u_c(y)$  funkcji złożonej obliczamy jako sumę geometryczną różniczek cząstkowych:

$$u_c(y) = \sqrt{\left[ \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot u(x_1) \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot u(x_2) \right]^2 + \dots}, \quad (28)$$

gdzie w rozwinięciu w szereg Taylora uwzględnia się tylko wyrazy pierwszego rzędu, a  $u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)$ , są wartościami niepewności standardowych wielkości  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , bezpośrednio mierzonych w pomiarze, liczonych z wzoru (24). Natomiast wartość końcową wielkości  $Y$  obliczamy ze wzoru (27), przyjmując wartości średnie wielkości wyznaczonych bezpośrednio w eksperymencie:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n). \quad (29)$$

Jeżeli złożona wielkość fizyczna  $Y$  wyraża się wzorem w postaci iloczynowej wielkości bezpośrednio wyznaczanych w eksperymencie:

$$y = \prod_{i=1}^n A x_i^{a_i}, \quad (30)$$

gdzie  $A$  i  $a_i$  stałe, to obliczanie wyrażenia na niepewność standardową  $u_c(y)$  wielkości  $Y$ , wyrażonej wzorem (30), znacznie upraszcza się, przyjmując postać

$$u_c(y) = \bar{y} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{a_i}{x_i} \cdot u(x_i) \right]^2}, \quad (31)$$

$$u_c(y) = \bar{y} \sqrt{\left[ \frac{a_1}{x_1} \cdot u(x_1) \right]^2 + \left[ \frac{a_2}{x_2} \cdot u(x_2) \right]^2 + \dots}$$

gdzie:  $\bar{y}$  – średnia wartość wielkości  $Y$ , wyliczona ze średnich wartości  $\bar{x}_i$  podstawionych do wzoru (30).

Wzory (28) i (31) definiują tzw. prawo **przenoszenia niepewności standardowych** w sytuacji, gdy niepewności standardowe wielkości bezpośrednio mierzonych są obliczane metodą typu A.

### Przykład 5

Wyznaczamy objętość wałka z przykładu 4, którego długość ma wartość:  $\bar{l} = 35,69(5)$  mm. Pomiarzy średnicy wykonano suwmiarką, powtarzając 20-krotnie i uzyskując wynik:  $\bar{d} = 4,89(2)$  mm oraz  $\delta_d [\%] = 0,4\%$ . Niepewność standardową  $u(d) = 0,02$  mm wyznaczono w sposób analogiczny jak w przykładzie 4, tzn. ze wzoru (24).

Objętość wałka wyliczona ze wzoru

$$\bar{V} = \frac{\pi(\bar{d})^2}{4} \bar{l} = 669,93 \text{ mm}^3,$$

a niepewność standardową wielkości złożonej  $u_c(V)$  wyliczamy z prawa przenoszenia niepewności (wz. (28))

$$u_c(\bar{V}) = \sqrt{\left[ \frac{\partial V}{\partial d} \cdot u(d) \right]^2 + \left[ \frac{\partial V}{\partial l} \cdot u(l) \right]^2} = \sqrt{\left[ \frac{\pi d l}{2} \cdot u(d) \right]^2 + \left[ \frac{\pi d^2}{4} \cdot u(l) \right]^2} = 5,56 \text{ mm}^3.$$

Wynik końcowy pomiaru zapiszemy w postaci

$$\bar{V} = 670(6) \text{ mm}^3 \text{ lub } (670 \pm 6) \text{ mm}^3; \delta_v [\%] = 0,9\%.$$

## 5. NIEPEWNOŚCI SYSTEMATYCZNE PORÓWNYWALNE Z PRZYPADKOWYMI

W poprzednich dwóch punktach rozpatrzono obliczanie niepewności pomiarowych w przypadkach skrajnych: gdy niepewności systematyczne wszystkich wielkości bezpośrednio wyznaczanych w pomiarach dominują nad niepewnościami przypadkowymi (ocena typu B – pkt 3) oraz w sytuacji odwrotnej, gdy niepewności przypadkowe wielkości prostych przeważają nad niepewnościami systematycznymi (ocena typu A – pkt 4).

Chociaż są to przypadki skrajne, zdarzają się one w naszej praktyce laboratoryjnej bardzo często. Niemniej jednak możliwe są sytuacje, w których część wielkości prostych, służących do wyznaczenia wielkości złożonej, wykazuje przewagę niepewności systematycznych, a pozostała – przypadkowych. Spotykamy również przypadki, w których niepewności systematyczne wielkości bezpośrednio wyznaczanej w pomiarze są porównywalne z niepewnościami przypadkowymi tej wielkości.

Powstały problem można rozwiązać dwojako. Na podstawie rozkładu niepewności przypadkowych wyznaczyć można niepewność maksymalną (dobrą oceną będzie tu potrojona wartość niepewności standardowej  $u(x)$ ) i dodając do tego niepewności systematyczne, policzyć maksymalną niepewność wielkości złożonej metodą różniczki zupełnej lub logarytmicznej. Jest to metoda, która prowadzi do znacznego zawyżenia niepewności pomiarowej.

Właściwą metodą zalecaną przez „Przewodnik” jest skorzystanie z relacji między maksymalną niepewnością systematyczną  $\Delta x$  a niepewnością standardową  $u(x)$  – wz. (4) i wprowadzenie tak oszacowanej niepewności systematycznej do prawa przenoszenia niepewności standardowych – wz. (28) i (31).



Tak więc zgodnie z pkt 3 niepewność standardowa  $u(x)$  wiąże się z maksymalną niepewnością systematyczną  $\Delta x$  (ocena typu B) relacją

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}.$$

Uwzględniając zarówno niepewności systematyczne, jak i niepewności przypadkowe, niepewność standardową  $u(x)$  należy liczyć na podstawie wzoru:

$$u(x) = \left[ [u(\bar{x})]^2 + \left( \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

gdzie:  $u(\bar{x})$  – niepewność standardowa określająca niepewność przypadkową serii  $n$  pomiarów wielkości  $X$  (ocena typu A).

Natomiast niepewność standardowa  $u_c(y)$  wielkości złożonej będzie określona dość skomplikowanym, ogólnym wyrażeniem, wynikającym bezpośrednio z prawa przenoszenia

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left\{ \left[ \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right]^2 \cdot \sum_{j=1}^m \left[ [u(\bar{x}_i)]^2 + \left( \frac{\Delta x_{ij}}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \right\}}, \quad (33)$$

gdzie:  $m$  – liczba niepewności systematycznych, jakimi obciążone są wielkości  $X_i$  bezpośrednio dostępne w pomiarze, natomiast  $n$  – liczba zmiennych  $x_i$  funkcji  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### Przykład 6

W doświadczeniu wyznaczano średnicę  $d$  cienkiego drucika metodą ugięcia światła laserowego. Na ekranie w odległości  $l$  od drucika uzyskano obraz dyfrakcyjny, w którym odległości między środkami minimów dyfrakcyjnych wynoszą  $x$ . Średnicę drucika wyliczamy z wzoru

$$d = \frac{\lambda \cdot l}{x},$$

gdzie:  $\lambda$  – długość fali światła laserowego ( $\lambda = 632 \text{ nm}$ ).

W doświadczeniu  $l = 120 \text{ cm}$ , a niepewność systematyczną pomiaru odległości oszacowano na  $0,5 \text{ cm}$ . Odległości między minimami dyfrakcyjnymi zmierzono przy miarce milimetrowej, oceniając niepewność systematyczną tego pomiaru na  $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$ . Uzyskano następujące wyniki 20 pomiarów odległości  $x$ : 10,0; 9,5; 8,5; 9,0; 9,5; 8,0; 9,0; 9,5; 10,0; 9,0; 9,0; 9,5; 9,0; 9,5; 10,0; 9,0; 8,5; 9,5; 9,0 mm. Średnia odległość  $\bar{x} = 9,2 \text{ mm}$ , natomiast niepewność standardowa wyliczona z wz. (24) –  $u(x) = 0,52 \text{ mm}$ . Tak więc wkłady obu niepewności są porównywalne:  $u(x) \cong \Delta x$ ! Zatem niepewność standardową  $u(x)$  pomiaru odległości  $x$  należy obliczyć ze wzoru (32), natomiast złożoną niepewność  $u_c(d)$  końcowego wyniku obliczamy zatem ze wzoru (33), uwzględniając zarówno przyczynę systematyczny jak i przypadkowy. Odpowiednie obliczenia prowadzą do następującego wzoru

$$u_c(\bar{d}) = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)^2 \cdot \left[ (u(\bar{x}))^2 + \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}\right)^2 \right] + \left(\frac{\partial d}{\partial l}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta l}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{\lambda \cdot l}{\bar{x}^2}\right)^2 \left[ (u(\bar{x}))^2 + \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{3}}\right)^2 \right] + \left(\frac{\lambda}{\bar{x}}\right)^2 \left(\frac{\Delta l}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

i po podstawieniu wartości liczbowych niepewność standardowa wyniku złożonego jest równa:

$$u_c(\bar{d}) = \sqrt{91,80 \cdot 10^{-6} + 567,80 \cdot 10^{-6} + 0,04 \cdot 10^{-6}} = 25,68 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

Średnia wartość średnicy drucika

$$\bar{d} = \frac{\lambda \cdot l}{\bar{x}} = 0,0826 \text{ mm,}$$

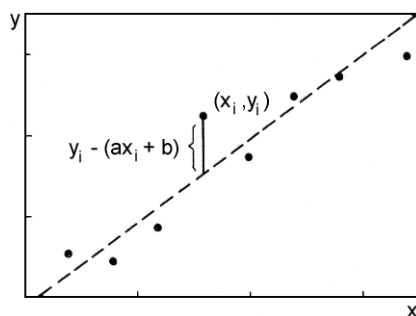
a wynik końcowy pomiaru zapisujemy w postaci:

$$\bar{d} = (0,083 \pm 0,026) \text{ mm lub } \bar{d} = 0,083(26) \text{ mm oraz } \delta_d [\%] = 30\%.$$

Jak wynika z wartości liczbowych wyrażenia pod pierwiastkiem, największy wpływ na stosunkowo dużą niepewność standardową wielkości złożonej (~30%) ma niepewność systematyczna wyznaczenia odległości między minimami dyfrakcyjnymi (drugi człon). Należy zatem zmienić metodę pomiaru odległości między minimami dyfrakcyjnymi (x), poprawiając znacznie jej dokładność.

## 6. METODA NAJMNIJSZYCH KWADRATÓW

Bardzo często w praktyce laboratoryjnej zachodzi konieczność graficznego przedstawienia wyników pomiarów w postaci liniowej zależności  $y = ax + b$ . Należy wówczas przez zbiór punktów:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  wraz z ich niepewnościami  $\Delta x_i$  i  $\Delta y_i$  poprowadzić najlepiej dopasowaną prostą. Istnieje jednak pewna procedura rachunkowa, zwana **metodą najmniejszych kwadratów**, prowadząca do obliczenia parametrów prostej (a, b)



Rys. 6

dla zbioru n par liczb  $x_i, y_i$ . Nazwa bierze się od podstawowego założenia metody – takiego doboru parametrów a i b, aby suma kwadratów różnic wartości eksperymentalnych  $y_i$  i obliczonych  $ax_i + b$  była jak najmniejsza (rys. 6).

Utwórzmy zatem funkcję parametrów prostej  $S(a, b)$  taką, że:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min. \quad (34)$$

Kryterium określone wzorem (34) wyprowadza

się przy założeniu, że tak zdefiniowane odchylenia mają rozkład normalny (Gaussa). Warunkiem koniecznym na istnienie ekstremum wyrażenia (34) jest zerowanie się pochodnych cząstkowych względem  $a$  i  $b$ :

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0,$$

co prowadzi do układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi ( $a$  i  $b$ ):

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \quad (35)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy wzory określające parametry prostej  $a$  i  $b$ :

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Zastosowanie praw statystyki matematycznej pozwala również wyprowadzić odpowiednie wyrażenia na niepewności standardowe  $u(a)$  i  $u(b)$  parametrów prostej

$$\begin{aligned} u(a) &= \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2}{n-2 \cdot \left( n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)}}, \\ u(b) &= u(a) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Wyrażenia (36) i (37) wydają się nieco skomplikowane, ale można uzyskać znacznie wygodniejszą w obliczeniach postać, wykorzystując definicje wartości średnich:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{i} \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ \overline{x^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{i} \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2. \end{aligned}$$

Wówczas równania (36) i (37) przyjmą postać

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2} \quad \text{i} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (38)$$

$$u(a) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \left[ \frac{\overline{y^2} - a\bar{xy} - b\bar{y}}{x^2 - (\bar{x})^2} \right]}, \quad (39)$$

$$u(b) = u(a)\sqrt{x^2},$$

w którym  $(\bar{x})^2 = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$  jest kwadratem wartości średniej zmiennych niezależnych  $x_i$ .

Metoda najmniejszych kwadratów nie zapewnia samoczynnej eliminacji punktów pomiarowych, znacznie odbiegających od prostej. Dlatego też wykres  $y = f(x)$  umożliwiający wizualną ocenę danych pomiarowych należy wykonać przed przystąpieniem do obliczeń, a najlepiej jeszcze w czasie pomiarów. Można wówczas albo powtórzyć pomiar, który znacznie odbiega od prostej, albo w ostateczności taki wynik pomiaru wyeliminować z obliczeń parametrów prostej.

Obliczone w ten sposób parametry  $a$  i  $b$  pozwalają jawnie zapisać równanie  $y = ax + b$  i „wrysować” tak wyliczoną prostą w układ punktów pomiarowych  $(x_i, y_i)$  przedstawionych na wykresie zależności  $y = f(x)$ .

Częstym przypadkiem w pomiarach laboratoryjnych jest niepełne równanie liniowe ( $b = 0$ ), które chcemy poddać analizie metodą najmniejszych kwadratów. Dla funkcji  $y = ax$  z kryterium najmniejszych kwadratów

$$S(a) = \sum_{i=1}^n [y_i - ax_i]^2 = \min \quad (40)$$

i po obliczeniu pochodnej, otrzymujemy tylko jedno równanie, z którego możemy obliczyć parametr  $a$ :

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \quad (41)$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}},$$

gdzie  $\overline{xy}$  i  $\overline{x^2}$  zgodnie z definicją są wartościami średnimi

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{i} \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Natomiast wyrażenie na niepewność standardową parametru  $a$  przyjmie postać

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2} \cdot \frac{\sum y_i^2 - a \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2}},$$

czyli

$$u(a) = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left[ \frac{\overline{y^2}}{\overline{x^2}} - a^2 \right]}, \quad (42)$$

gdzie

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

natomiast  $a$  jest parametrem prostej wyliczonej ze wzoru (41).

Równania  $y = ax + b$  i  $y = ax$  nazywamy **równaniami regresji liniowej** wielkości fizycznej  $Y$  względem wielkości  $X$ . Miarą tego, jak silna jest badana współzależność, jest współczynnik korelacji liniowej

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\left[ \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \right] \cdot \left[ \overline{y^2} - (\overline{y})^2 \right]}}. \quad (43)$$

Współczynnik korelacji zawiera się w przedziale  $-1 \leq r \leq 1$ , przy czym korelacja jest tym silniejsza, im większą wartość osiąga  $|r|$ . Tablice statystyczne podają graniczne wartości  $|r_{gr}|$  (w zależności od liczby pomiarów  $n$ ), od których wzwyż można wnioskować o istnieniu istotnej współzależności pomiędzy badanymi wielkościami fizycznymi.

Występujące w równaniu regresji parametry mają często określony sens fizyczny i metoda najmniejszych kwadratów pozwala na ich najbardziej wiarygodną ocenę.

W wielu przypadkach, jeżeli zależność między  $y$  i  $x$  nie jest liniowa, możemy naszą funkcję sprowadzić do postaci liniowej poprzez odpowiednią zamianę zmiennych. Do postaci liniowej łatwo jest sprowadzić funkcje wykładniczą typu:  $z = c \cdot e^{ax}$ . Po zlogarytmowaniu otrzymujemy  $\ln z = \ln c + ax$ .

Po podstawieniu  $y = \ln z$ ,  $b = \ln c$ , otrzymujemy funkcję liniową

$$y = ax + b.$$

W podobny sposób można do postaci liniowej sprowadzić funkcję potęgową:  $z = ct^a$ , podstawiając  $y = \log z$ ,  $b = \log c$ ,  $x = \log t$ , otrzymujemy:

$$y = ax + b.$$

W przypadku funkcji typu hiperbolicznego

$$y = \frac{a}{t} + b$$

postać liniową otrzymujemy przez podstawienie  $x = 1/t$ :

$$y = ax + b.$$

Jako przykład zastosowania metody najmniejszych kwadratów do znajdowania równania regresji liniowej oraz oceny jej parametrów wykorzystamy pomiary pochłaniania promieniowania ( $\gamma$ ) w zależności od grubości warstwy absorbenta (ów. 37).

### Przykład 7

Zależność liczby zliczeń, która jest proporcjonalna do liczby kwantów  $\gamma$  wysyłanych przez źródło, od grubości warstwy absorbenta wyraża się wzorem:

$$N(x) = N_0 \exp(-\mu x),$$

gdzie:  $N_0$  – liczba zliczeń pochodząca od kwantów, przy braku materiału osłabiającego. (Ponieważ promieniowaniu  $\gamma$  towarzyszy promieniowanie  $\alpha$  lub  $\beta$ , pomiar bez absorbenta daje nam liczbę zliczeń wyższą od  $N_0$ ),

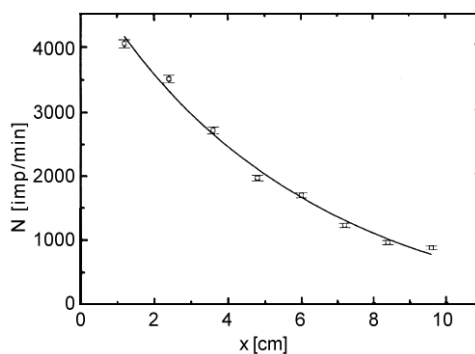
$\mu$  – współczynnik osłabienia promieniowania [ $\text{cm}^{-1}$ ],

$x$  – grubość absorbenta [cm].

W tabeli 1 zamieszczono wyniki pomiarów po uwzględnieniu promieniowania tła  $N_t = 36$  imp./min., natomiast na rys. 7 przedstawiono zależność  $N = f(x)$ .

**Tabela 1**

Grubość $x_i$ absorbenta [cm]	1,2	2,4	3,6	4,8	6,0	7,2	8,4	9,6
liczba zliczeń $N_i(x)$ [imp./min]	4052	3510	2711	1956	1680	1205	937	853



Rys. 7

W celu wyznaczenia parametrów  $\mu$  i  $N_0$  posłużymy się metodą najmniejszych kwadratów, sprowadzając uprzednio zagadnienie do postaci liniowej. Po zlogarytmowaniu stronami wyrażenie na  $N(x)$  przyjmuje postać

$$\ln N = \ln N_0 - \mu x .$$

Wprowadzając oznaczenia:  $a = -\mu$ ,  $b = \ln N_0$ ,  $y = \ln N$ , otrzymujemy równanie prostej

$$y = b + ax .$$

Przed przystąpieniem do obliczeń parametrów prostej tworzymy bardzo pożyteczną tabelkę pomocniczą:

Lp.	$x_i$ (cm)	$\ln N = y_i$	$x_i y_i$ (cm)	$x_i^2$ (cm <sup>2</sup> )	$y_i^2$
1	1,2	8,3069	9,9684	1,44	69,006
2	2,4	8,1638	19,552	5,76	66,640
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
8	9,6	6,7487	64,788	92,16	45,546
średnia	$\bar{x} = 5,4$	$\bar{y} = 7,5083$	$\bar{xy} = 39,037$	$\bar{x}^2 = 36,72$	$\bar{y}^2 = 56,678$

i dodatkowo obliczamy  $(\bar{x})^2 = (5,4 \text{ cm})^2 = 29,16 \text{ (cm)}^2$ .

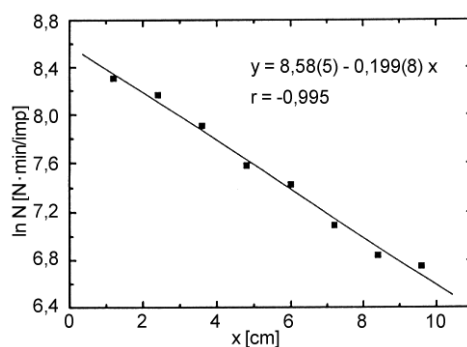
Wykorzystując ostatni wiersz tabelki oraz układ równań (38) i (39), obliczamy parametry prostej (a i b) oraz ich niepewności  $u(a)$  i  $u(b)$ :

$$a = -0,199 \text{ cm}^{-1}; \quad u(a) = 0,008 \text{ cm}^{-1};$$

$$b = 8,58; \quad u(b) = 0,05,$$

natomiast ze wzoru (43), jako miarę współzależności obliczamy współczynnik korelacji, którego wartość wynosi  $r = -0,995$ . Tak więc szukane równanie prostej ma ostatecznie postać:  $y = 8,59(5) - 0,199(8) \cdot x$ .

Współczynnik osłabienia promieniowania  $\gamma$  wyznaczony w tym doświadczeniu jest więc równy  $\mu = (0,199 \pm 0,008) \text{ cm}^{-1}$ , a jego niepewność względna  $\delta_\mu [\%] = 4\%$ . Natomiast początkowa liczba zliczeń  $N_0 = (5350 \pm 270) \text{ imp/min}$  i niepewność względna  $\delta_N [\%] = 5\%$ . Rezultaty obliczeń metodą najmniejszych kwadratów oraz dane doświadczalne przedstawiono na rysunku 8.



Rys. 8

## 7. PREZENTACJA WYNIKÓW POMIARÓW

Wyznaczoną wielkość fizyczną musimy przedstawić z odpowiednią precyzją wraz z przedziałem niepewności wynikłej z metody pomiarowej, użytych przyrządów czy też właściwości obiektu mierzonego. Sposoby określenia niepewności pomiarowych zostały omówione wcześniej, w tym miejscu podamy pewne ogólne zasady prezentacji wyników końcowych.

Wynik pomiarów, bezpośredni lub będący wynikiem obliczeń, jeśli wyznaczamy wielkość złożoną, podajemy wraz z niepewnością standardową bezwzględną  $u(x)$  i względną  $\delta_x$ .

Bezwzględna niepewność standardowa  $u(x)$  (ocena typu A) lub niepewność maksymalna  $\Delta x$  (ocena typu B) określa, o ile wynik pomiaru  $x$  może różnić się od rzeczywistej wartości  $x_0$ . Nie znamy rzeczywistej wartości, ale uważamy, że mieści się ona z określonym prawdopodobieństwem w przedziale

$$x - u(x) \leq x_0 \leq x + u(x); \text{ ocena typu A,}$$

$$x - \Delta x \leq x_0 \leq x + \Delta x; \text{ ocena typu B,}$$

dlatego wynik końcowy zapisujemy w postaci

$$x_0 = \bar{x} \pm u(x) \text{ lub } x_0 = x \pm \Delta x .$$

Międzynarodowa Norma uznaje również inny sposób podania wyniku końcowego, np.:

$$x_0 = \bar{x} (u(x)) \text{ lub } x_0 = \bar{x} \text{ oraz } u(x).$$

Jako przykład zapisu końcowego przytoczmy wynik pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego:

$$g = 9,782 \text{ m/s}^2, \quad u(g) = 0,076 \text{ m/s}^2,$$

lub

$$g = 9,782(76) \text{ m/s}^2,$$

lub

$$g = (9,782 \pm 0,076) \text{ m/s}^2.$$

Prawdopodobieństwo, z jakim rzeczywista wartość mieści się w określonym przez nas przedziale, jest bardzo istotną informacją, którą należy podać oprócz wartości niepewności pomiarowej.

Ocena niepewności typu A oparta jest na rozkładzie normalnym (Gausa), stąd przyjęcie szerokości przedziału niepewności:  $\pm 1u(x)$ ,  $\pm 2u(x)$  czy  $\pm 3u(x)$  określa wartość tego prawdopodobieństwa odpowiednio na: 68,2% i 95,4% i 99,7%. Natomiast niepewność maksymalna  $\Delta x$  (ocena typu B) oparta jest na rozkładzie prostokątnym (jednostajnym) stąd prawdopodobieństwo, że wartość rzeczywista mieści się w przedziale  $\pm \Delta x$  jest równe pewności (100%).

Niepewność względną określamy jako stosunek niepewności bezwzględnej  $u(x)$  (lub  $\Delta x$ ) do otrzymanego wyniku pomiaru  $x$  i podajemy zazwyczaj w procentach

$$\delta_x [\%] = \frac{u(x)}{x} \cdot 100\% .$$



Stosowanie niepewności względnej ma istotne znaczenie dla określenia dokładności pomiarów. Jeśli mierzymy długość ołówka (~10 cm) z dokładnością do 1 mm, to taka dokładność (niepewność względna ~1%) wydaje się i wystarczająca i rozsądna. Natomiast pomiar długości boków pokoju (~5 m) z taką samą niepewnością bezwzględną jest już pomiarem bardzo dokładnym (niepewność względna ~0,02%) i zupełnie niepotrzebnym, który zresztą trudno byłoby nam przeprowadzić. Dlatego podanie niepewności bezwzględnej niewiele nam mówi o rzeczywistej dokładności pomiaru jeśli nie zestawimy tej niepewności z wartością mierzonej wielkości. Z tego punktu widzenia wielkość niepewności względnej daje nam pojęcie o dokładności pomiarów i umożliwia porównanie dokładności różnych metod i różnych wielkości. Ponadto w przypadku niepewności złożonej (opartej na prawie przenoszenia niepewności) pozwala ocenić wkład niepewności pomiarów bezpośrednich do całkowitej niepewności wyniku końcowego.

Końcowe rezultaty należy podawać we właściwie dobranych jednostkach i z odpowiednią precyzją. O precyzji zapisu danej liczby świadczy ilość zawartych w niej cyfr znaczących. Cyframi znaczącymi są cyfry od 1 do 9, np. liczba 321 ma 3 cyfry znaczące (lub miejsca znaczące). Zero jest cyfrą znaczącą tylko w przypadku, gdy znajduje się między dwoma cyframi nie będącymi zerami, albo na dowolnym miejscu po cyfrze nie będącej zerem ale zawartej w liczbie z przecinkiem. Na przykład liczbę 500 możemy zapisać jako  $5 \cdot 10^2$  - przedstawia więc ona jedno miejsce znaczące. Jeśli chcemy zaznaczyć, że posiada ona trzy cyfry znaczące, należy przedstawić ją w postaci  $5,00 \cdot 10^2$ . Zera będących miejscami znaczącymi nie należy opuszczać. W ułamkach dziesiętnych ilość miejsc znaczących odpowiada ilości cyfr po ostatnim zerze, przed którym nie ma cyfr znaczących, np. liczba 0,00120 ma 3 miejsca znaczące. Ułamki dziesiętne wygodnie jest zapisywać w postaci liczby niebędącej zerem, mnożonej przez 10 w odpowiedniej potęgze, np.  $0,00120 = 1,20 \cdot 10^{-3}$ ,  $1.200.000 = 1,20 \cdot 10^6$  itp.

Względną niepewność pomiaru, wyrażoną w procentach, podajemy z dokładnością do jednego miejsca znaczącego (np. 0,2%; 0,8%; 3%; 6%), lub dwóch miejsc znaczących, jeżeli  $\delta [\%] > 10\%$  (np. 13%, 18%, 20% itd.). Procentowa wartość niepewności względnej ogranicza ilość miejsc znaczących wyniku końcowego pomiaru i jego niepewności bezwzględnej.

Wynik pomiaru wielkości prostej lub złożonej zaokrąglamy zawsze do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego zaokrąglaliśmy niepewność pomiarową, bo tylko wtedy odzwierciedla on rzeczywistą dokładność pomiarową. Obie te wielkości zapisujemy w jednolitej postaci, tzn. jeśli wynik zapisujemy jako liczbę mnożoną przez 10 do dowolnej potęgi, to bezwzględna niepewność pomiarowa musi być również liczbą pomnożoną przez 10 do tej samej potęgi. W przeciwnym przypadku zapis traci swoją przejrzystość.

Jako przykład ilustrujący powyższe uwagi posłuży nam obliczenie równoważnika elektrochemicznego ( $k$ ) i jego niepewności maksymalnej ( $\Delta k$ ) dla pewnych jonów metalu. Z obliczeń uzyskaliśmy następujące liczby:  $k = 1,0963 \dots \cdot 10^{-6}$  kg/C; niepewność bezwzględna  $\Delta k = 0,347 \dots \cdot 10^{-6}$  kg/C i niepewność względna

$$\delta_k [\%] = \frac{\Delta k}{k} \cdot 100\% = \frac{0,347 \cdot 10^{-6} \text{ kg/C}}{1,0963 \cdot 10^{-6} \text{ kg/C}} \cdot 100\% = 4\%$$

Wynik końcowy zapisujemy w postaci

$$k = (1,10 \pm 0,04) \cdot 10^{-6} \text{ kg/C} \text{ lub } k = 1,10(4) \cdot 10^{-6} \text{ kg/C}; \delta[\%] = 4\%.$$

Zauważmy, że zero w wyniku końcowym jest liczbą znaczącą.

Z podanych powyżej zasad wynika, że powinniśmy dokonywać obliczeń z dokładnością o co najmniej jedno miejsce znaczące większą, niż dokładność z jaką podajemy wynik końcowy. Uwaga ta przy coraz powszechniejszym używaniu kalkulatorów nie jest zbyt istotna, pragniemy jednak przestrzec przed bezkrytycznym przepisywaniem uzyskanych na tej drodze obliczeń i przedstawianiem ich jako wyników końcowych. Na zakończenie tych uwag podajemy jeszcze kilka innych przykładów poprawnego zapisywania wyników końcowych:

$$m = (9,23 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \text{ kg}; \delta[\%] = 1\%,$$

$$I = 12,7(8) \cdot 10^{-3} \text{ A}; \delta[\%] = 6\%,$$

$$g = 9,782(76) \text{ m/s}^2; \delta[\%] = 0,7\%,$$

$$T = (293 \pm 1)\text{K}; \delta[\%] = 0,3\%,$$

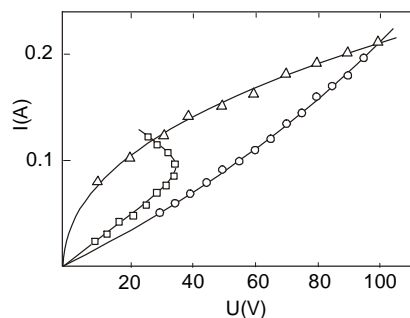
$$h = 6,59(25) \cdot 10^{-34} \text{ J s}; \delta[\%] = 4\% \text{ itd.}$$

W trakcie pracy w laboratorium fizycznym spotykamy się często z koniecznością przedstawienia wyników pomiarów w postaci graficznej, dlatego chcielibyśmy przypomnieć pewne ogólne zasady sporządzania wykresów.

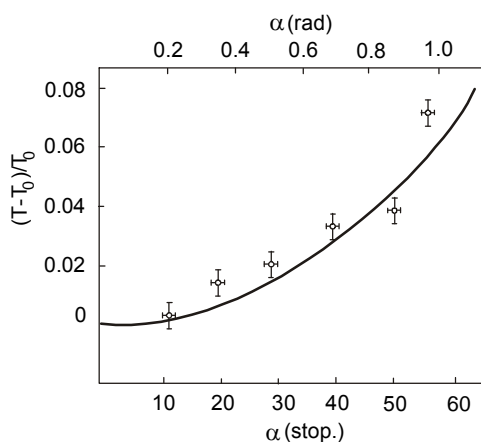
1. Wartości zmiennej niezależnej odkładamy na osi poziomej  $x$ , a zmiennej zależnej na osi pionowej  $y$ . Obie osie powinny być oznaczone symbolem lub nazwą zmiennej wraz z nazwą lub symbolem jednostki w jakiej jest ona wyrażona.
2. Skale obu osi powinny być tak dobrane, aby krzywa wykresu przebiegała możliwie przez całą jego powierzchnię. Oznacza to, że nie muszą one zaczynać się od zera tylko od wartości nieco mniejszej od najmniejszej zmierzonej wartości. Podziałki skali powinny być wyraźnie zaznaczone i tak dobrane, aby umożliwiły łatwe odczytanie jakiegokolwiek punktu na wykresie, z dokładnością równą co najmniej dokładności przeprowadzonych pomiarów.
3. Punkty doświadczalne powinny być przedstawione w wyraźny sposób kółkami lub krzyżykami tak, aby były widoczne na tle przeprowadzonej krzywej.
4. Na wykresie należy zaznaczyć niepewności pomiarowe reprezentowane przez poszczególne punkty. Jeśli tylko jedna wielkość jest obciążona niepewnością, np. zmienna zależna  $Y$ , to zaznaczamy to pionową kreską o długości  $2\Delta y$ , której środek przypada w danym punkcie. W przypadku, gdy obie zmienne obciążone są niepewnościami pomiarowymi, zaznaczamy to w postaci krzyżyka o ramionach  $2\Delta x$  i  $2\Delta y$ , na przecięciu których znajduje się punkt reprezentujący wynik pomiaru.
5. Prowadząc krzywą, mającą określić charakter przebiegu punktów doświadczalnych, należy przede wszystkim zwrócić uwagę na wielkości niepewności pomiarowych. Punkty wytyczające krzywą nie muszą na niej leżeć, a powinny być raczej równomiernie rozmieszczone powyżej i poniżej krzywej. Należy jednak dbać o to, by krzywa mieściła się w granicach zaznaczonych niepewności pomiarowych. Poprowadzona krzywa nie powinna mieć ostrych załamań i należy prowadzić ją w sposób możliwie ciągły. W pobliżu zauważonych maksimów lub minimów zagęszczenie punktów doświad-

czalnych powinno być większe. Punkty wyraźnie odbiegające od krzywej „wypośredkowanej” zwykle są wynikiem błędów grubych i w związku z tym odrzucamy je. Przykładem tego sposobu prowadzenia krzywej są wykresy charakterystyk prądowo-napięciowych dla różnych elementów elektronicznych (rys. 9).

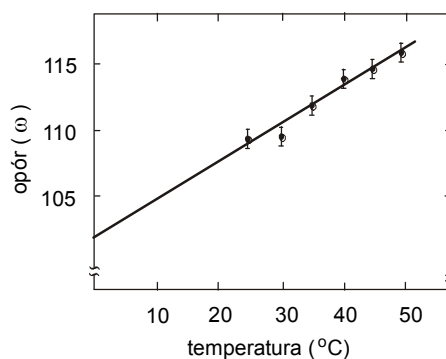
6. Gdy dysponujemy teorią pozwalającą obliczyć krzywą w sposób niezależny od położenia punktów doświadczalnych, to wykres składa się z tych punktów wraz z ich niepewnościami i krzywej teoretycznej (rys. 10). Krzywa doświadczalna nie jest potrzebna.
7. Znamy z teorii typ funkcji (np. wiemy, że jest to zależność liniowa), ale nie znamy jej parametrów (np. parametry  $a$  i  $b$  prostej). Korzystając z regresji liniowej (pkt 6), wyliczamy parametry  $a$  i  $b$ . Na wykres nanosimy punkty doświadczalne wraz z niepewnościami, a prostą „wrysowujemy” w układ punktów, zgodnie z równaniem:  $y = ax + b$  (rys. 11).



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

### Uwagi końcowe

Przed przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia laboratoryjnego należy się odpowiednio do tego przygotować. Przygotowanie polega m.in. na zrozumieniu badanego zjawiska i jego teorii oraz zapoznaniu się z planem ćwiczeń, metodą pomiaru oraz zestawem przyrządów. Nigdy nie należy przystępować do wykonania ćwiczenia, jeżeli nie jest ono dostatecznie jasne. Niezrozumienie celu wykonywanych czynności nie tylko nie daje żadnych korzyści poznawczych, lecz prowadzi może do uszkodzenia często kosztownego przyrządu, lub do wypadku. Przed pomiarami należy też przeprowadzić ogólną dyskusję błędów pomiaru

wielkości złożonej. Otrzymać z niej można cenne wskazówki, przy pomiarze jakich wielkości należy zwracać szczególną uwagę na dokładność pomiarów. Z przyrządami należy obchodzić się bardzo ostrożnie. Nie zaczynać np. łączyć obwodów elektrycznych od źródła prądu. W każdym przypadku bezwzględnie należy stosować się do wskazówek podanych w instrukcji do każdego ćwiczenia, do regulaminu ogólnego, mówiącego o zachowaniu się w sali laboratoryjnej oraz do bezpośrednich wskazówek prowadzącego ćwiczenia.

Właściwe przygotowanie do wykonywania ćwiczeń wymaga również pogłębienia wiadomości o odpowiednich zjawiskach na podstawie wykazu literatury umieszczonego na końcu skryptu. Wyboru literatury dokonano opierając się na kilku ogólnie dostępnych (Biblioteka Główna PG) i możliwie nowych podręcznikach z zakresu fizyki ogólnej.

Na zakończenie tych wstępnych i ogólnych uwag chcielibyśmy udzielić jeszcze jednej rady. Często wielkości wyznaczone w trakcie pracy z laboratorium są wielkościami wyznaczonymi uprzednio z dużą dokładnością i łatwo dostępnymi w tablicach fizycznych. Dobrze jest nasze końcowe wyniki skonfrontować z zamieszczonymi tam danymi – będzie to dodatkowym sprawdzianem zarówno poprawności naszych obliczeń, jak i metody pomiarowej oraz sposobu określenia niepewności pomiarowych.

## LITERATURA

- [1] Guide to Expression of Uncertainty in Measurements, ISO 1995, Switzerland. Tłumaczenie: Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik. Warszawa: Główny Urząd Miar 1999.
- [2] Szydłowski H.: Postępy fizyki 51, 92 (2000).
- [3] Zięba A.: Postępy fizyki 52, 238 (2001).
- [4] Szydłowski H.: Pracownia fizyczna. Warszawa: PWN 1999.
- [5] Pracownia fizyczna Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej AGH. (Red. A. Zięba). Skrypt nr 1529. Kraków: Wydawnictwo AGH 1998.
- [6] Laboratorium podstaw fizyki Politechniki Warszawskiej. (Red. J. Hrabowska, L. Tykarski). Warszawa: Wydawnictwo PW 1985.