

METODYKA WYKONYWANIA POMIARÓW ORAZ OCENA NIEPEWNOŚCI I BŁĘDÓW POMIARU

Celem każdego ćwiczenia w laboratorium studenckim jest zmierzenie pewnych wielkości, a następnie obliczenie na podstawie tych wyników pomiarów wartości wielkości badanej. Rezultatem końcowym badań jest nie tylko otrzymany wynik liczbowy. Nie mniej ważne jest dokonanie oceny dokładności pomiaru oraz opracowanie wniosków końcowych. Warto zadać sobie pytanie: czy to, co zostało zmierzone, ma sens i co z tego wynika? Aby wnioski były wiarygodne, należy przeprowadzić analizę **niepewności i błędów pomiaru**. Wielkość niepewności pomiaru pozwala na ocenę rezultatu naszych badań. Niepewność względna pomiaru mieszcząca się w granicach od 0,1% do 10% jest typową dla doświadczeń w laboratoriach studenckich. Niepewność rzędu kilkudziesięciu procent zmusza do zastanowienia, czy można ten pomiar wykonać dokładniej (inne przyrządy?, inna metoda?, może warto odrzucić któryś z pomiarów, jeśli wyraźnie odbiega od pozostałych?). Wartość niepewności mniejsza niż 0,1% też jest niepokojąca, ponieważ taki i lepszy poziom dokładności można uzyskać w najlepszych laboratoriach naukowych. Dlatego jeśli wartość niepewności względnej pomiaru jest mniejsza niż 0,1%, warto zweryfikować prawidłowość obliczeń.

Wśród wielu podejść do oceny niepewności pomiaru najbardziej wskazane jest wyznaczanie niepewności standardowej opartej na pojęciu zwanym odchyleniem standardowym pomiaru (oznaczane zwykle jako **S**).

Starszym i bardziej ostrożnym podejściem do oceny dokładności pomiaru jest ocena za pomocą niepewności maksymalnej (oznaczane zwykle jako **Δ**). Metoda ta szczególnie nadaje się do szybkiego oszacowania niepewności pomiaru.

W niniejszym opracowaniu podane zostaną sposoby obliczeń niepewności standardowej i maksymalnej.

Więcej informacji o podstawach oceny dokładności pomiarów można znaleźć w książce pt. „Pracownia fizyczna wspomagana komputerowo”, H.Szydłowski PWN (2012).

I. Uwagi ogólne, które należy stosować przy każdym pomiarze:

Dokładność przeprowadzonego pomiaru zależy od wielu czynników, które można podzielić na tzw. błędy i niepewności pomiarowe.

Ia: Błędy pomiarowe dzielimy na trzy grupy:

1. błąd przybliżenia,
2. błąd przeoczenia (systematyczne),
3. pomyłki.

Błędy przybliżenia wynikają z uproszczenia warunków pomiaru lub ze stosowania przybliżonych wzorów (np. przybliżenie $\sin\alpha=\alpha$ dla małych kątów).

Błędy przeoczenia (systematyczne) wynikają z niedokładności użytych przyrządów, błędnej metody pomiaru lub działania trudno zauważalnych czynników zewnętrznych. Źle wykonana linijka, źle wykalibrowany miernik spowodują, że wynik będzie systematycznie mniejszy lub większy od rzeczywistej wartości. Wykrycie źródła błędów systematycznych jest trudne i wymaga porównania użytych przyrządów ze wzorcem oraz dogłębnej analizy metody pomiaru. Przy wykonywanych w laboratorium studenckim ćwiczeniach zwykle zakładamy, że przyrządy są wolne od błędów systematycznych.

Pomyłki (błędy grube) powstają wskutek fałszywego odczytania wskazań, błędnego zapisania wyniku itp. Pomyłki dają się łatwo zauważyć i wyeliminować, ponieważ otrzymany wynik znacznie różni się od innych wyników pomiarów tej samej wielkości. Wynik uzyskany obarczony błędem grubym w dalszej analizie należy pominąć.

Ib. Zbadanie przyczyn **niepewności pomiarowych** pozwala na podzielenie wszystkich niepewności na:

1. niepewność wzorcowania,
2. niepewność eksperymentatora,
3. niepewność przypadkową.

1. Niepewność wzorcowania wynika ze stosowania wzorców-przyrządów pomiarowych, które są zawsze obciążone pewną niepewnością pomiarową. W załączonej lub znalezionej w internecie instrukcji przyrządu można i trzeba odczytać wartość dokładności pomiaru na danym zakresie. Obecnie producenci przyrządów pomiarowych powinni gwarantować taką dokładność przyrządu, aby wynik pomiaru wykonanego za jego pomocą nie różnił się od rzeczywistej wartości wielkości mierzonej więcej niż o jedną działkę elementarną. Działka elementarna to najmniejsza działka podziałki zaznaczonej na skali przyrządu analogowego i jednostka dekady wskazującej najmniejszą wartość w przyrządach cyfrowych.

Przykład 1 Działka elementarna. Ocena dokładności za pomocą instrukcji przyrządu:

1a. Mikroamperomierz wskazówkowy, który mierzy na zakresie $200\mu\text{A}$ ze skalą podzieloną na 100 działek ma działkę elementarną $\Delta_d I = 2\mu\text{A}$, natomiast cyfrowy mikroamperomierz wskazujący, na przykład, wartość $197,32\mu\text{A}$ ma działkę elementarną $\Delta_d I = 0,01\mu\text{A}$. Typowa linijka lub miarka zwijana ma działkę elementarną $\Delta_d l = 1\text{mm}$.

1b. Bardzo często w instrukcji przyrządu pomiarowego można odczytać, jaka jest dokładność pomiaru ($P\% \text{ rdg} + n \text{ dgd}$). Oznacza to, że niepewność wzorcowania $\Delta_d X = P\% \cdot \text{odczytana wartość} + n \text{ działek elementarnych}$. Przykładowo, miernikiem o dokładności ($1,5\% \text{ rdg} + 3 \text{ dgd}$) zmierzono napięcie $U = 1,23\text{V}$. Ponieważ działka elementarna wynosi $0,01\text{V}$ niepewność

pomiarowa wynosi $\Delta U = (1,5\% \cdot 1,23 + 3 \cdot 0,01)V = 0,04845V$. Wynik końcowy pomiaru : $U = (1,23 \pm 0,05)V$.

Uwaga: Niepewność pomiaru została zaokrąglona, a wynik końcowy zapisany zgodnie z zasadami opisanymi w dalszej części opracowania.

1c. W przypadku przyrządów analogowych niepewność wzorcowania jest obliczana w pierwszej kolejności na podstawie tzw. klasy przyrządu. Klasa przyrządu wyraża stosunek procentowy niepewności maksymalnej Δx do pełnego wychylenia miernika w danym zakresie. Oznacza to, że wartości odczytana z miernika może się różnić od wartości prawdziwej x_0 maksymalnie o $\pm \Delta x$. Niestety w większości przypadków pomiar miernikiem analogowym nie jest dokładny w tym sensie, że wskazówka miernika nie pokrywa się działką, ale znajduje się na przykład w jej 1/3. W związku z tym przy wyznaczaniu niepewności wzorcowania takiego miernika musimy uwzględnić to, że w sposób subiektywny oceniamy położenie wskazówki. Eksperymentator musi w takim przypadku sam ocenić, o ile mógł się „pomylić” w odczycie. Niepewność wzorcowania (niepewność maksymalna) przyrządu analogowego jest sumą niepewności wynikającej z klasy przyrządu i z odczytu eksperymentatora, a niepewność maksymalną obliczamy ze wzoru:

$$\Delta x = \left[\left(\frac{\text{klasa miernika} \times \text{zakres miernika}}{100} \right) + \Delta x_{\text{odczytu}} \right]$$

2. Niepewnością eksperymentatora Δ_{ex} nazywamy ilościową ocenę niepewności wyniku spowodowaną np. złą widocznością (np. wskazówki, skali), wywołaną szumami, szybkimi zmianami wskazań itp. Eksperymentator musi sam ocenić wartość Δ_{ex} . Dla wahań wartości mierzonej wywołanych szumami za Δ_{ex} można przyjąć połowę szerokości drgań wyrażoną w odpowiednich jednostkach.

Przykład 2.

2a. Linijką o niepewności wzorcowania $\Delta_d H = 1\text{mm}$ jednokrotnie zmierzono wysokość i szerokość książki. Mierząc wysokość H przyłożono linijkę do dobrze przyciętej okładki i odczytano: $H = 228\text{ mm}$. Dokładność eksperymentatora oceniono na $\Delta_e H = 1\text{mm}$ (linijka wprawdzie dobrze przylegała do okładki, ale był problem z odczytem z powodu zaokrąglenia krawędzi). Wniosek: niepewność maksymalna pomiaru wysokości jest sumą obu niepewności $\Delta H = \Delta_d H + \Delta_e H = 2\text{mm}$. Można teraz powiedzieć, że wysokość książki wynosi $H = (228 \pm 2)\text{ mm}$.

Pomiar szerokości książki dał następujący wynik: $L = 165\text{ mm}$. Ze względu na obły grzbiet książki, niepewność eksperymentatora pomiaru jej szerokości oceniono na $\Delta_e L = 2\text{mm}$. Dlatego wynik końcowy uwzględniający niepewność wzorcowania i eksperymentatora to: $L = (165 \pm 3)\text{ mm}$.

2b. Woltomierzem zmierzono napięcie baterii. Mimo, iż miernik może mierzyć z dokładnością $\Delta_d U = 0,002V$ to wskutek zakłóceń ostania cyfra „miga” i wartość napięcia zmienia się w zakresie 1,54-1,58V. Odczytem w tej sytuacji jest wartość średnia $U = 1,56V$, natomiast za niepewność eksperymentatora należy przyjąć połowę zakresu $\Delta_e U = 0,02\text{ V}$. Niepewność maksymalna tego pojedynczego pomiaru wynosi: $\Delta U = \Delta_d U + \Delta_e U = 0,022\text{ V}$.

Wynik końcowy ma postać: $U = (1,560 \pm 0,022)\text{ V} \approx (1,56 \pm 0,02)\text{ V}$.

3. Niepewność przypadkowa.

W celu zwiększenia dokładności i wiarygodności pomiarów często wykonuje się kilka razy ten sam pomiar. W wyniku takiego działania otrzymamy szereg wyników, które na ogół

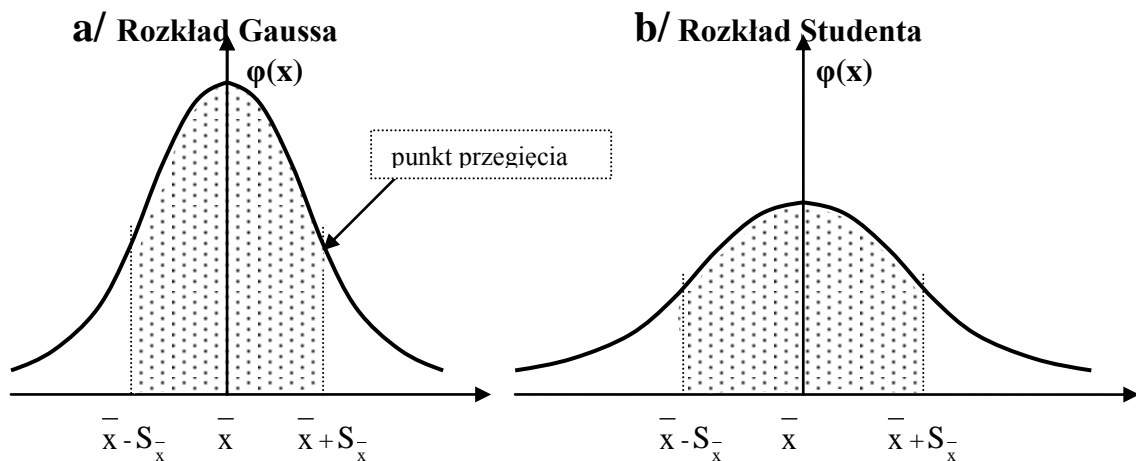
mają nieco inną wartość. Obserwowany rozrzut wyników można ocenić określając **niepewność przypadkową pomiaru**. Niepewność przypadkowa przy wielokrotnym pomiarze wielkości X jest wywołana ograniczonymi zdolnościami rozpoznawczymi naszych zmysłów (oka, ucha.), naturą zjawiska oraz niestałością warunków zewnętrznych. Dlatego rozrzut wyników ma charakter statystyczny, a miarą takiego rozrzutu jest **odchylenie standardowe wartości średniej $S_{\bar{x}}$** . Uniknięcie niepewności przypadkowych nie jest możliwe, jednakże teoria błędów podaje zasady, które pozwalają ustalić ich wartość.

Z teorii wynika, że dla serii równoważnych sobie pomiarów wielkości X **wynikiem końcowym** takiej serii n pomiarów jest średnia arytmetyczna zbioru wartości, tzn.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{czyli} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \quad (0.1)$$

Analizując odchylenia pojedynczych pomiarów od wartości średniej, czyli różnice $(x_k - \bar{x})$ dla $k=1\dots n$, można zauważyć, że nie wszystkie odchylenia są jednakowo prawdopodobne. Odchylenia duże są mniej prawdopodobne od odchylen małych. Zależność prawdopodobieństwa częstotliwości występowania odchylen od ich wartości nazywa się rozkładem prawdopodobieństwa.

Dla dużej ilości pomiarów ($n > 10$) do oceny odchylen stosujemy rozkład prawdopodobieństwa Gaussa (tzw. rozkład normalny) natomiast dla małej ilości pomiarów stosujemy rozkład Studenta. Na rysunku 1 przedstawione są wykresy gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(x)$ zmiennej losowej - wyników pomiaru x dla obu rozkładów. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(x)$ ma tę cechę, że całka z $\varphi(x)$ po całym przedziale zmienności wyników pomiaru x wynosi 1 (pole pod krzywą $\varphi(x)$ jest równe 1). Oznacza to oczywistą pewność (100% pewność) znalezienia dowolnej wartości zmiennej x w całym jej przedziale zmienności.



Rys.1. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa a/Gaussa b/Studenta.

Znając wartość średnią \bar{x} serii pomiarów oraz odchylenie standardowe wartości średniej $S_{\bar{x}}$ można **określić przedział zmienności x**

$$(\bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}}) \quad (0.2)$$

Można wykazać, że prawdopodobieństwo znalezienia wartości rzeczywistej X w przedziale określonym wzorem 0.2 wynosi $p=0,683$. Mówimy, że z poziomem ufności równym 0,683 (lub 68,3%) wartość rzeczywista X znajduje się w przedziale $(\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x)$. Na wykresach z rysunku 1 zaznaczono pole pod wykresem funkcji w zakresie $x \in (\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x)$. W obu przypadkach pole wynosi 0,683.

Odchylenie standardowe wartości średniej w rozkładzie Gaussa można obliczyć ze wzoru :

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (0.3)$$

Jak widać z rysunku 1 krzywa Studenta jest bardziej spłaszczona w stosunku do krzywej Gaussa. Taka zależność jest wyrazem faktu, że mniejsza ilość pomiarów daje wynik końcowy z większą niepewnością, czyli z większym odchyleniem standardowym. Dlatego odchylenie standardowe w rozkładzie Studenta jest większe t_n razy od odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym ($t_n > 1$). Wartość współczynnika t_n (zwanego współczynnikiem krytycznym rozkładu Studenta) zależy od ilości pomiarów i od poziomu ufności. W tabeli 1 przedstawione są wartości t_n w zależności od liczby pomiarów n dla poziomu ufności $p=0,683$. Taki poziom ufności jest wystarczający przy opracowaniu pomiarów w laboratorium studenckim.

Tab.1. Wartości współczynnika krytycznego w rozkładzie t-Studenta dla poziomu ufności $p=0,683$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05

W praktyce laboratoryjnej przyjmuje się założenie, że gdy liczba n pomiarów jest niewielka ($n < 11$) to do analizy statystycznej otrzymanych rezultatów i oceny **niepewności przypadkowej** wartości średniej stosuje się rozkład Studenta. Wtedy odchylenie standardowe S_x wartości średniej \bar{x} oblicza się ze wzoru:

$$S_x = t_n \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (0.4)$$

Jeśli liczba pomiarów jest stosunkowo duża ($n > 10$) można przyjąć, że mamy do czynienia z rozkładem normalnym (Gaussa), dla którego współczynnik t_n jest równy jeden, czyli

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (0.5)$$

Jeżeli chcemy mieć prawie pewność (poziom ufności $p=0,997$), że wartość rzeczywista znajduje się w przedziale określonym niepewnością, to do oceny niepewności pomiaru należy używać potrójnej wartości odchylenia standardowego (tzw. reguła $3S_x$) czyli

$$(\bar{x} - 3S_x, \bar{x} + 3S_x). \quad (0.6)$$

Regułę $3S_x$ można zastosować przy ocenie czy punkt pomiarowy z serii pomiarów "odstający" od innych rzeczywiście jest wynikiem błędu grubego. W tym celu liczy się średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe serii pomiarów bez uwzględnienia "podejrzanego" pomiaru. Następnie sprawdza się, czy ten punkt mieści się w granicach $(\bar{x} - 3S_x, \bar{x} + 3S_x)$. Jeśli nie mieści się w tym przedziale, można go wykluczyć z analizy jako błąd grubo.

4. Związek między niepewnością maksymalną i standardową -uwagi końcowe

Podsumowując kwestię wielokrotnego pomiaru można powiedzieć, że wynikiem wielokrotnego pomiaru tej samej wielkości fizycznej, w tych samych warunkach, jest średnia arytmetyczna poszczególnych rezultatów (wzór 0.1) \bar{x} , natomiast jej niepewnością przypadkową jest odchylenie standardowe wartości średniej S_x obliczone ze wzoru (0.4) lub (0.5). Trzeba pamiętać, że dokładność pomiarów wartości x_k może być zmniejszona poprzez obecność niepewności wzorcowania $\Delta_d x$ i eksperymentatora $\Delta_e x$. Wtedy przyjmując dla obu typów niepewności prostokątny rozkład prawdopodobieństwa, ich odchylenie standardowe wzorcowania i eksperymentatora wynosi odpowiednio:

$$S_{xd} = \frac{\Delta_d x}{\sqrt{3}} \quad \text{oraz} \quad S_{xe} = \frac{\Delta_e x}{\sqrt{3}} . \quad (0.7)$$

W przypadku, gdy koniecznym jest uwzględnienie wszystkich rodzajów niepewności, czyli niepewność eksperymentatora $\Delta_e x$, niepewność wzorcowania $\Delta_d x$ i niepewność przypadkową określoną odchyleniem standardowym wartości średniej S_x , stosujemy następujący wzór

$$S_x = \sqrt{S_{xd}^2 + S_{xe}^2 + S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\Delta_d x)^2 + \frac{1}{3}(\Delta_e x)^2 + S_x^2} . \quad (0.8)$$

Zastosowanie powyższego wzoru daje 68,3% pewności, że rzeczywista wartość x mieści się w granicach $(\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x)$. Wzór (0.8) upraszcza się znacznie, gdy jeden lub dwa rodzaje niepewności nie występują lub są do zaniedbania.

W ocenie niepewności maksymalnej, gdy koniecznym jest uwzględnienie wszystkich rodzajów niepewności, czyli niepewność eksperymentatora $\Delta_e x$, niepewność wzorcowania $\Delta_d x$ i niepewność przypadkową określoną odchyleniem standardowym wartości średniej S_x stosujemy następujący wzór

$$\Delta X = \Delta_d x + \Delta_e x + 3S_x . \quad (0.9)$$

Zastosowanie powyższego wzoru daje 99,7% pewności, że rzeczywista wartość x mieści się w granicach $(\bar{x} - \Delta X, \bar{x} + \Delta X)$. Powyższy wzór upraszcza się znacznie, gdy jeden lub dwa rodzaje niepewności nie występują lub są do zaniedbania. Np. przy pojedynczym pomiarze odchylenie standardowe wynosi 0.

Przykład 3

3a. Seria pomiarów tej samej wielkości fizycznej.

Wykonano serię pomiarów czasu spalania zapalek. Uzyskano osiem wyników: $t_1=15s$, $t_2=16s$, $t_3=13s$, $t_4=14s$, $t_5=7s$, $t_6=15s$, $t_7=17s$, $t_8=16s$. Wśród tych ośmiu pomiarów wartość pomiaru t_5 wyraźnie "odstaje" od innych. Wstępnie można ten pomiar wyeliminować jako błąd grubo. Wynikiem siedmiu pomiarów jest obliczona na podstawie wzoru (0.1) średnia $\bar{t}=15,1429$ s. Z tabeli (1) wynika, że dla $n=7$ współczynnik krytyczny rozkładu Studenta wynosi $t_n=1,09$. Dlatego odchylenie standardowe wartości średniej S_{ts} jest równe $0,554s$ (wzór 0.4). Po uwzględnieniu niepewności wzorcowania $\Delta_d t=1s$, można obliczyć (wzór 0.8) i zapisać, że z prawdopodobieństwem $0,68$ średni czas palenia się zapalek z tej próby wynosi: $\bar{t}=(15,14\pm 0,80)$ s. Można teraz potwierdzić zasadność wyrzucenia pomiaru t_5 jako błędu grubego stosując zasadę $3S_x$ (0.6).

3b Pojedynczy pomiar-ocena niepewności standardowej i maksymalnej.

Wynik pomiaru wysokości krawężnika wykonany za pomocą linijki jest następujący $L=156mm$. Ze względu na zużycie linijki oraz obły kształt krawędzi krawężnika oszacowano niepewność eksperymentatora na $\Delta_e L=3mm$. W powiązaniu z niepewnością wzorcowania $\Delta_d L=1mm$ wyliczona na podstawie wzoru (0.8), niepewność standardowa pomiaru wynosi: $S_L=1,82574$ mm.

Wynik końcowy z niepewnością standardową: $L=(156\pm 2)mm$.

Wynik końcowy z niepewnością maksymalną (0.9): $L=(156\pm 4)mm$.

3c. Pojedynczy pomiar-jedno źródło niepewności

Zmierzono suwmiarką średnicę pręta stalowego. Otrzymano wynik $\Phi=12,1mm$ obarczony niepewnością wzorcowania $\Delta_d \Phi=0,1$ mm. Ponieważ suwmiarka dobrze "przylegała" do powierzchni pręta niepewność eksperymentatora uznano za równą zero.

Wynik pomiaru z niepewnością maksymalną $\Phi=(12,1\pm 0,1)mm$

Wynik pomiaru z niepewnością standardową (wzór 0.7 i 0.8) $\Phi=(12,10\pm 0,06)mm$.

5. Pomiar wielkości złożonej:

Przedstawione powyżej działanie pozwala na obliczenie niepewności **pomiaru jednej wielkości fizycznej**. Prawa i zasady fizyki pokazują zależności między wieloma wielkościami fizycznymi, Znając te zależności, można dokonać pomiaru innych wielkości, aby na koniec obliczyć tę interesującą. Na przykład, żeby obliczyć średnią prędkość samochodu wystarczy zmierzyć czas ruchu i drogę, jaką przebędzie w tym czasie samochód. Podstawiając do wzoru (zależności) $V=s/t$ osiągniemy wynik końcowy. Ogólnie mówimy wtedy o **wielkości złożonej** lub wielkości **wyznaczonej pośrednio**.

Ogólnie, jeśli wielkość y jest funkcją L zmiennych, czyli $y(x_1, x_2, \dots, x_L)$, to, aby wyznaczyć wartość y i niepewność pomiaru S_y należy zmierzyć L wielkości zmiennych x_1, x_2, \dots, x_L , oraz określić ich niepewności standardowe. **Niepewność standardową pomiaru wielkości złożonej y** obliczamy ze wzoru

$$S_y = \sqrt{\sum_{i=1}^L \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} S_{x_i} \right)^2} \quad (0.10)$$

gdzie: $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ są pochodnymi cząstkowymi.

Niepewność maksymalną pomiaru wielkości złożonej y , znając niepewności maksymalne zmiennych x_1, x_2, \dots, x_L obliczamy ze wzoru

$$\Delta y = \sum_{k=1}^L \left| \frac{\partial y}{\partial x_k} \Delta x_k \right| = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_L} \Delta x_L \right| \quad (0.11)$$

gdzie: $\frac{\partial y}{\partial x_k}$ są kolejnymi pochodnymi cząstkowymi.

W praktyce, gdy funkcja ma postać iloczynu:

$$y = Ax_1^a x_2^b x_3^c \dots, \quad (0.12)$$

względna maksymalna niepewność pomiaru wielkości złożonej $y(x_1, x_2, x_3, \dots)$ jest wyrażona wzorem:

$$\frac{\Delta y}{y} = \left| a \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| b \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| + \left| c \frac{\Delta x_3}{x_3} \right| + \dots \quad (0.13)$$

Przykład 4

Celem obliczenia energii kinetycznej wagonu, zmierzono jego prędkość i masę uzyskując następujące rezultaty: $V=(31 \pm 2)$ m/s i $m=(15,0 \pm 0,5)$ t.

Energia kinetyczna wagonu wynosi: $E = \frac{mV^2}{2} = 7207500$ J.

Na podstawie wzoru (0.10) mamy:

$$S_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m} S_m \right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial V} S_V \right)^2} = \sqrt{\frac{V^4 S_m^2}{4} + m^2 V^2 S_V^2} = E \sqrt{\left(\frac{S_m}{m} \right)^2 + \left(\frac{2S_V}{V} \right)^2} = 960531 \text{ J} = S_E = 97 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Wynikiem końcowym jest wartość energii kinetycznej wagonu,

czyli $E=(721 \pm 97) \cdot 10^4$ J.

Można też obliczyć niepewność maksymalną (wzór 0.13) wielkości złożonej. W tym przykładzie niepewność względna energii wynosi:

$$\frac{\Delta E}{E} = \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| 2 \frac{\Delta V}{V} \right| = 3,3\% + 12,9\% = 16,2\%, \quad \text{czyli } E=(721 \pm 118) \cdot 10^4 \text{ J}.$$

Jak widać, zgodnie z oczekiwaniem niepewność maksymalna tego pomiaru (118J) jest większa od niepewności standardowej (97J).

6. Badania zależności między wielkościami fizycznymi

Osobnym zagadnieniem jest zbadanie lub potwierdzenie, że istnieją określone związki między wielkościami fizycznymi. W takim przypadku pomiary badanej wielkości **Y** wykonujemy przy wielu celowo wybranych wartościach innej wielkości **X**. W rezultacie uzyskujemy zbiór **n** niezależnych wyników (x_i, y_i) , gdzie $i=1,2,3,\dots$. Jednym ze sposobów opracowania takich danych jest naniesienie punktów pomiarowych na wykres. Charakterystyczny układ punktów może sugerować istnienie zależności między wielkościami **y** i **x** w postaci znanych funkcji, np. liniowej, kwadratowej, eksponencjalnej... Do weryfikacji, czy dana funkcja prawidłowo opisuje położenie punktów pomiarowych, służy metoda najmniejszych kwadratów. W tej metodzie szuka się takich parametrów funkcji **y(x)**, dla których suma kwadratów różnic pomiędzy wartościami zmierzonymi y_i , a policzonymi na podstawie tej funkcji $y(x_i)$, jest najmniejsza.

Metodą najmniejszych kwadratów można w stosunkowo prosty sposób wyznaczyć współczynniki **a** i **b** funkcji liniowej typu $y=ax+b$. Jeśli wiemy lub podejrzewamy, że wykresem reprezentującym nasze punkty pomiarowe może być linia prosta, podstawiamy

odpowiednie wielkości jako \mathbf{y} i jako \mathbf{x} , po czym wyliczamy na podstawie poniższych wzorów współczynniki \mathbf{a} i \mathbf{b}

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad (0.14)$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad (0.15)$$

gdzie

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad \overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}. \quad (0.16)$$

Niepewności standardowe (niepewności) współczynników \mathbf{a} i \mathbf{b} oblicza się z zależności

$$S_a^2 = \frac{1}{n-2} \frac{\overline{y^2} - a\overline{xy} - b\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{i} \quad S_b^2 = S_a^2 \bar{x}^2 \quad (0.17)$$

gdzie

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n}. \quad (0.18)$$

Wyznaczona w ten sposób funkcja $\mathbf{y=ax+b}$ opisuje najbardziej prawdopodobną liniową zależność dla punktów pomiarowych $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$. Trzeba pamiętać, że zaufanie do końcowego wyniku zależy od liczby analizowanych punktów pomiarowych. Im mniej analizowanych punktów pomiarowych, tym mniejsze prawdopodobieństwo uzyskania dobrego wyniku. O jakości dopasowania funkcji mówi współczynnik korelacji liniowej \mathbf{r} , opisany wzorem

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad r \in \langle -1, 1 \rangle. \quad (0.19)$$

Im bliższa jedności jest wartość współczynnika korelacji liniowej \mathbf{r} , tym większe jest prawdopodobieństwo, że postać funkcji prawidłowo opisuje analizowaną serię pomiarów.

Powyższą procedurę, nazywaną regresją liniową zwyczajną (uzyskiwanie linii trendu), można zastosować nie tylko do prostych zależności liniowych np. $s(t)=vt$, $U(I)=RI$, $R(t)=R_0(1+\alpha t)$. Wiele innych zależności, po odpowiednich przekształceniach, można doprowadzić do postaci liniowej.

Przykład 5

Prawo pochłaniania promieniowania gamma jest opisane funkcją

$$N(d) = N_0 e^{-\eta d} \quad \text{czyli} \quad \frac{N(d)}{N_0} = e^{-\eta d}.$$

Po zlogarytmowaniu obu stron równania można otrzymać postać

$$\ln \frac{N(d)}{N_0} = -\eta d.$$

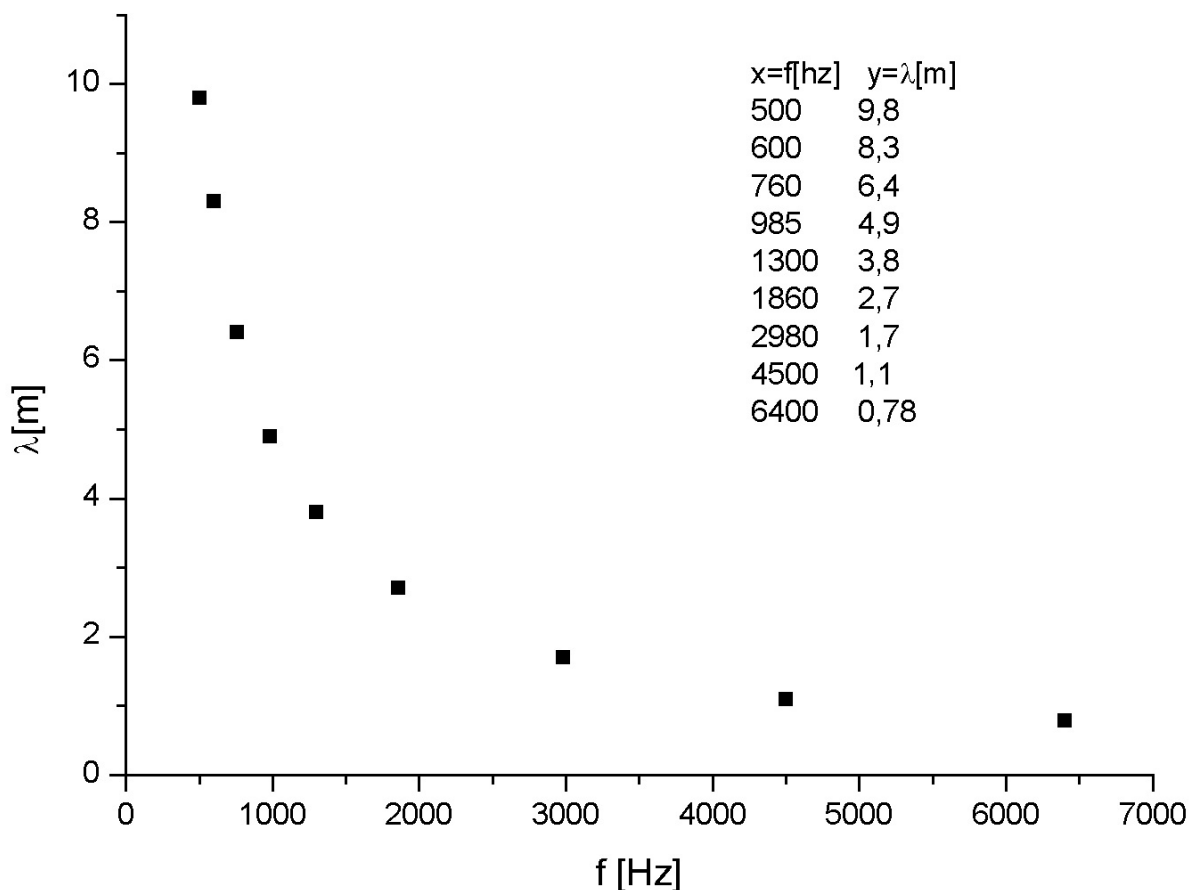
Jeśli za $\ln(N(d)/N_0)$ podstawimy \mathbf{y} , za \mathbf{d} zmienną \mathbf{x} to otrzymujemy typową funkcję liniową typu

$$\mathbf{y=ax},$$

gdzie $\mathbf{a=-\eta}$.

Przykład 6

Na rysunku 2 przedstawiono wyniki pomiaru długości fali dźwiękowej ($\lambda=y$) w pewnym metalu w funkcji częstotliwości tej fali ($f=x$). Wykres wykonano w programie Origin.

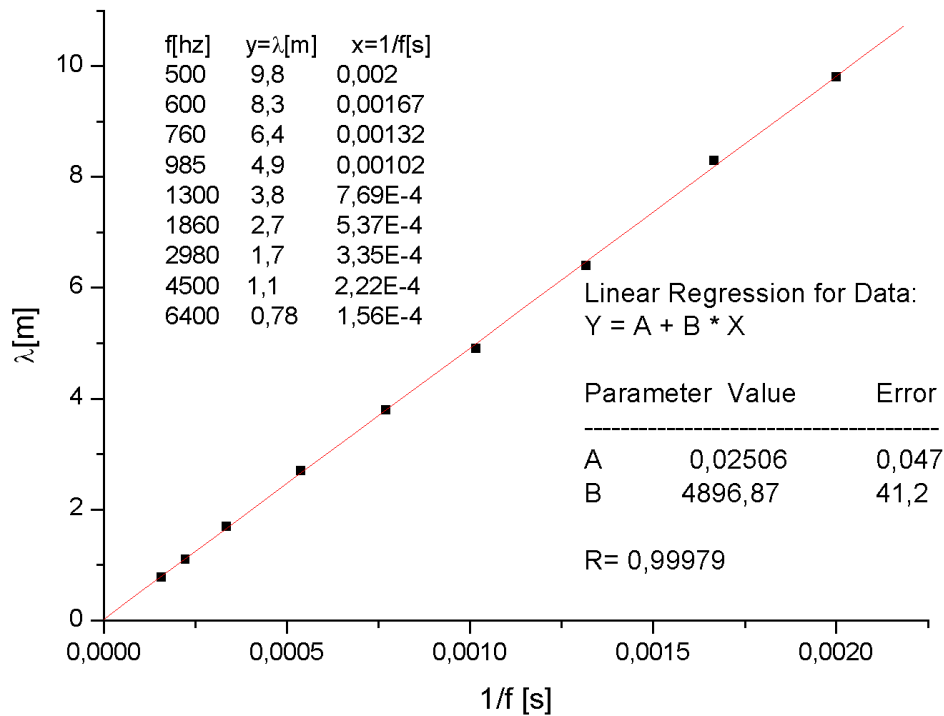


Rys.2. Wykres zależności długości fali dźwiękowej w pręcie metalowym od częstotliwości.

Te same dane pomiarowe wykreślone są również na Rys.3. Tym razem zmienną x jest odwrotność częstotliwości fali, czyli $1/f$. Ponieważ z wykresu można sądzić, że punkty układają się wzdłuż linii prostej, można zastosować regresję (aproksymację) liniową. Taka procedura nazywana jest wyznaczaniem linii trendu (np. w programie Excel).

Uwaga: Współczynniki we wzorach (0.14) i (0.15) dotyczą równania typu $y=ax+b$.

W programach komputerowych, np. Origin, Excel, przyjęto zapis wielomianu, jako $y=A+Bx+Cx^2+\dots$



Rys.3. Wykres zależności długości fali dźwiękowej w pręcie metalowym od odwrotności częstotliwości.

Z wyników regresji liniowej przedstawionych na rysunku 3 można wyprowadzić następujące wnioski:

1. Zbliżona do jedności wartość współczynnika korelacji $R=0,99979$ pozwala sądzić, że długość fali jest związana z jej częstotliwością zależnością $\lambda = A + B/f$.
2. Współczynnik proporcjonalności B mający wymiar [m/s] jest wartością prędkością fali dźwiękowej w badanym pręcie metalowym, czyli $V=4897 \pm 42$ [m/s].
3. Współczynnik $A=(0,025 \pm 0,047)$ [m] co jest zgodne z oczekiwaniem, że $A=0$ (dla częstotliwości f fali dążącej do nieskończoności, jej długość λ maleje do zera).
4. Zależność $\lambda = V/f$ jest potwierdzona przez powyższe dane doświadczalne.
5. Prędkość fali dźwiękowej o częstotliwości w zakresie od 800Hz do 7500Hz jest stała (nie zależy od częstotliwości fali).

Uwaga: Wszelkie obliczenia w w/w procedurze można i warto wykonać posilując się dostępnymi programami programach typu Origin, Excel lub korzystając z kalkulatora.

7. Wykonywanie wykresów i graficzna analiza funkcji liniowej.

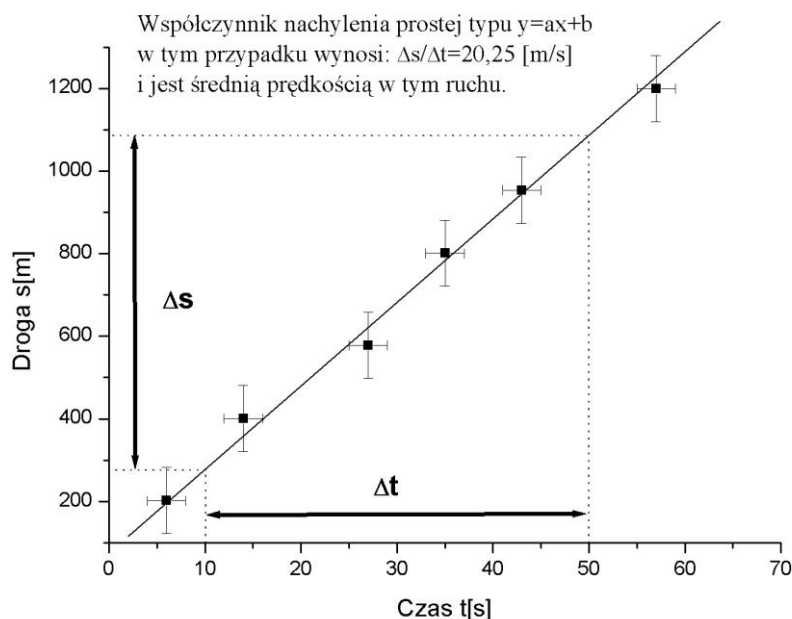
Metoda „ręczna” opracowania wykresów

Bardzo zbliżone wyniki przy analizie współczynników **a** i **b** funkcji $y=ax+b$ można uzyskać wykorzystując metodę graficzną. W tym przypadku należy:

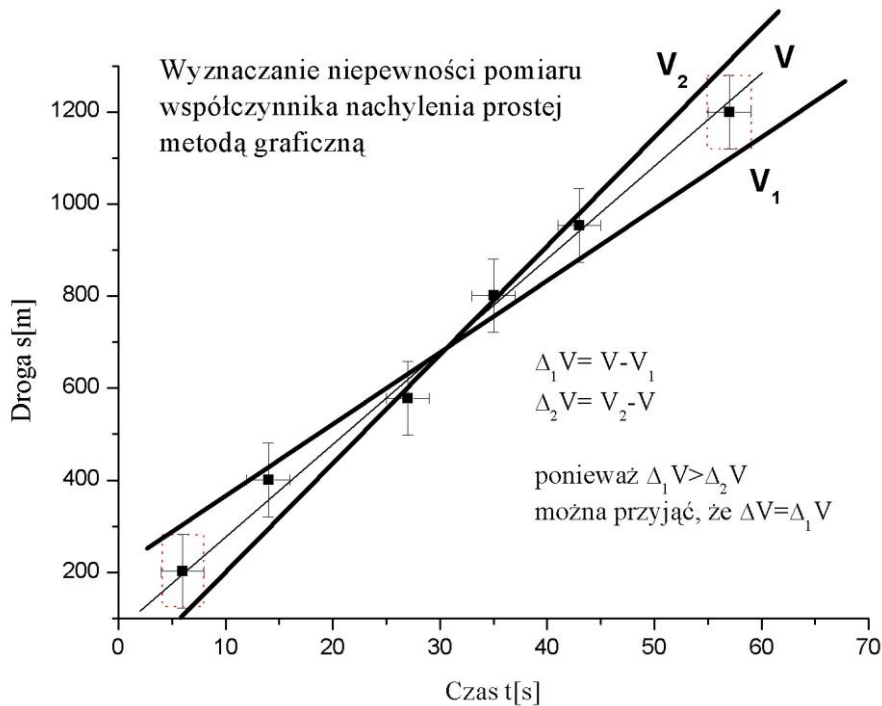
1. narysować i opisać układ współrzędnych oraz zaznaczyć punkty pomiarowe wraz z niepewnościami pomiaru (przykład rys.4a),
2. jeśli punkty układają się wzdłuż linii prostej (kwestia oceny eksperymentatora „na oko”) narysować linię prostą tak, aby w przybliżeniu po obu stronach linii pozostała ta sama liczba punktów (rys.4a),
3. określić pewien szeroki przedział wartości argumentu czyli Δx (Δt na rys.4a) i odpowiadający jemu przyrost funkcji Δy (Δs na rys.4a). Współczynnik nachylenia **a** narysowanej prostej będzie wynosił $a=\Delta y/\Delta x$. Współczynnik **b** jest punktem przecięcia prostej z osią **y**,

Uwaga: współczynnik **a** praktycznie nigdy nie jest tangensem kąta nachylenia prostej (kąta, który można odczytać z wykresu),

4. w celu wyznaczenia niepewności pomiaru współczynnika **a** rysować dwie proste o skrajnych nachyleniach, obejmujące punkty pomiarowe wraz z niepewnościami pomiaru (rys.4b),
5. wyznaczyć współczynniki nachylenia obu prostych **a**₁ i **a**₂. Niepewność maksymalna pomiaru współczynnika **a** jest równa różnicy $\Delta a = a - a_1$ lub $\Delta a = a - a_2$, przy czym wybieramy wartość większą. [np. z rys.4b $\Delta V = 4,5$ m/s czyli $V = (20,3 \pm 4,5)$ m/s]



Rys. 4a. Wykres pomiarów zasięgu lotu trzmiela w funkcji czasu. Wyznaczenie prędkości lotu.



Rys.4b Wykres pomiarów zasięgu lotu trzmiela w funkcji czasu.
Wyznaczenie niepewności pomiaru prędkości lotu.

II. Ważne uwagi końcowe :

Rezultatem pomiaru wielkości **X** jest wartość **x** oraz obliczona niepewność pomiaru. Niepewność pomiaru można wyrazić w postaci ułamka lub procentowo także jako **względne odchylenie standardowe**

$$V_x = \frac{S_x}{x} \quad (0.12)$$

Rezultat końcowy pomiaru wielkości **X** przedstawiamy w następujący sposób

$$X = (x \pm S_x) [\text{jednostka}] \quad \text{lub} \quad X = x [\text{jednostka}] \pm V_x \quad (0.13)$$

Uwaga: Prawidłowo zapisany wynik końcowy pomiaru z reguły wymaga zaokrąglenia.

Zasada zaokrąglenia jest następująca:

1. Niepewność pomiaru (S_x lub Δx) pewnej wielkości **X** zaokrąglamy do takiego miejsca, aby pozostały tylko maksymalnie dwie cyfry znaczące.

2. Wartość niepewności zawsze zaokrąglamy w górę, ponieważ w żadnym przypadku nie wolno nam zmniejszać niepewności.

3. Wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego została zaokrąglona niepewność pomiaru. Przy zaokrągleniu wyniku pomiaru liczbę kończącą się cyframi 0-4 zaokrąglamy w dół, a 5 - 9 w górę.

4. Czasami się zdarza, że w przypadku pojedynczych pomiarów powinniśmy zaokrąglić niepewność pozostawiając tylko jedną cyfrę znaczącą.

5. Jeśli przyrząd pomiarowy jest w stanie podać wynik tylko do określonego miejsca dziesiątego, to nie ma sensu podawać niepewności oraz wyniku z większą dokładnością. Przykładowo, jeśli wykonujemy pomiar długości linijką i wynosi on 55 mm, to niepewność podajemy też w pełnych milimetrach (2 mm), nawet jeśli z obliczeń (np. ze wzoru 0.8) otrzymamy niepewność bardziej dokładną (typu 1,9 mm).

5. Trzeba pamiętać, że zaokrąglamy wynik końcowy, a nie wyniki pośrednie!

Przykład 8

Po opracowaniu pomiarów średnicy Φ drutu otrzymałem następujące wyniki: $\Phi=0,00345678\text{m}$ i $S_{\Phi}=5,4687 \cdot 10^{-4}\text{m}$. Cyfr znaczących w liczbie określającej Φ jest 6 i tylko 6. (nie 9, bo zera po lewej stronie liczby się nie liczą), natomiast w wartości niepewności cyfr znaczących jest 5.

Po zaokrągleniu, wynik końcowy można przedstawić w formie

$$\Phi=(3,46 \pm 0,55) \cdot 10^{-3}\text{m}, \quad \text{czyli} \quad \Phi=(346 \pm 55) \cdot 10^{-5}\text{m} \quad \text{lub} \quad \Phi=346(55) \cdot 10^{-5}\text{m}.$$

Przykład 9

Wielu fizyków długo pracowało, aby uzyskać i zapisać prawidłowo bardzo dokładne stałe fizyczne np.:

$$\text{Ładunek elektronu (ładunek elementarny) [2]} \quad e=(1,60217653 \pm 0,00000014) \cdot 10^{-19}\text{C}$$

$$\text{Ładunek elektronu (ładunek elementarny) [1]} \quad e=1,602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19}\text{C}$$

$$\text{Stała Boltzmana [1]: } k=R/N_A=(1,3806505 \pm 0,0000024) \cdot 10^{-23}\text{J/K}$$

$$\text{Stała Faradaya [1]: } F=N_A e=(96\,485,3383 \pm 0,0083)\text{C/mol}$$

$$\text{Stała grawitacyjna [2]} \quad G_N=(6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11}\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$$
$$\text{[1]} \quad G=6,674\,28(67) \cdot 10^{-11}\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)\text{ itp.}$$

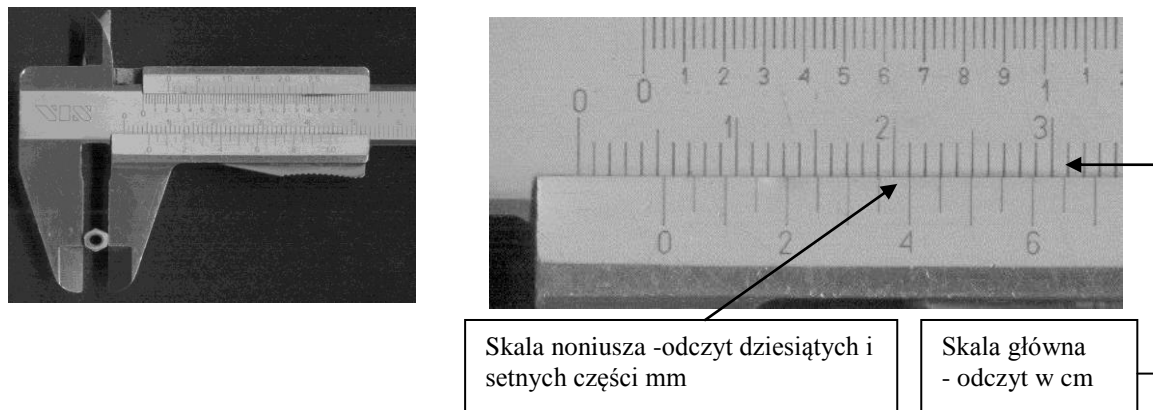
[1] http://pl.wikipedia.org/wiki/Sta%C5%82e_fizyczne

[2] wynik wcześniejszy od [1]

III. Uwagi przydatne przy wykonywaniu doświadczeń i opracowywaniu wyników.

1. W suwmiarkach, śrubach mikrometrycznych, w niektórych skalach kątowych korzysta się podziałki zwanej noniusem. Wartość mierzona za pomocą tych przyrządów, z grubsza, odczytujemy z położenia kreski przy zerze „0”, natomiast dziesiąte i setne części, z miejsca gdzie jedna z kreszek na skali noniusza pokrywa się z kreską skali głównej. Przykład odczytu

przedstawiono na rysunku 5. Wynik pomiaru szerokości nakrętki M3, czyli $S=(5,40\pm 0,05)\text{mm}$.



Rys.5: Zasada odczytu wyniku pomiaru szerokości na suwmiarce

Obecnie coraz częściej spotykane są przyrządy typu suwmiarki, kątomierze z elektronicznym odczytem. W tym przypadku należy uwzględnić dokładność podawaną przez producenta.

2. Na wykresach skalę dobierać tak, aby uzyskane krzywe zajmowały prawie cały dostępny obszar. Zaczynanie skali od zera nie jest konieczne!!

3. Każda oś na wykresie powinna zawierać: podziałkę główną, podziałkę pomocniczą, etykiety podziałek wraz z jednostkami oraz opisy osi.

4. **Nie** łączyć punktów pomiarowych odcinkami tworząc w ten sposób linię łamaną. Krzywa doświadczalna zazwyczaj powinna być przedstawiona jako linia „gładka” rysowana tak, aby po obu jej stronach znajdowała się taka sama liczba punktów pomiarowych. W przypadku określenia badanej funkcji za pomocą regresji liniowej, należy jej wykres zamieścić wraz z punktami doświadczalnymi.

5. Przez punkty pomiarowe prowadzimy słupki niepewności (odcinek o długości równej podwojonej niepewności pomiarowej, ze środkiem w punkcie pomiarowym) lub otaczamy je prostokątami niepewności (środek w punkcie pomiarowym, a wymiary – podwojona niepewność pomiarowa).

UWAGA:

Przed przystąpieniem do wykonywania zadania laboratoryjnego należy zrozumieć badane zjawisko fizyczne, metodę pomiaru oraz uświadomić sobie cel danego ćwiczenia. Dobre przygotowanie do działań jest podstawą do osiągnięcia celu.